积分方程视角下函数空间理论的历史

李亚亚　王　昌　编著

電子工業出版社
Publishing House of Electronics Industry
北京 · BEIJING

内 容 简 介

函数空间理论是泛函分析的重要内容，起源于对积分方程的求解和变分法的研究. 希尔伯特在积分方程的研究中洞察到函数空间的相关理论. 在用现代抽象术语表述希尔伯特思想的过程中，追随者们逐渐建立了抽象函数空间理论. 本书在积分方程的视角下，对函数空间理论产生的背景、形成的原因、发展的过程进行了论述，着重探究了希尔伯特与其追随者们之间的思想传承. 本书有助于更好地理解函数空间理论的历史发展进程，进而更全面地理解近现代数学思想.

本书可供数学类专业的师生、科学史工作者以及数学爱好者参考和学习.

图书在版编目（CIP）数据

积分方程视角下函数空间理论的历史 / 李亚亚，王昌编著. — 北京：电子工业出版社，2018.6

ISBN 978-7-121-34325-4

I. ①积… II. ①李… ②王… III. ①函数空间 IV. ①O177.3

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2018)第 111624 号

策划编辑：冯小贝
责任编辑：冯小贝
印　　刷：
装　　订：
出版发行：电子工业出版社
　　　　　北京市海淀区万寿路 173 信箱　　邮编：100036
开　　本：787×980　1/16　印张：9.75　字数：159 千字
版　　次：2018 年 6 月第 1 版
印　　次：2018 年 6 月第 1 次印刷
定　　价：39.00 元

凡所购买电子工业出版社图书有缺损问题，请向购买书店调换. 若书店售缺，请与本社发行部联系，联系及邮购电话：(010)88254888，88258888.

质量投诉请发邮件至 zlts@phei.com.cn，盗版侵权举报请发邮件至 dbqq@phei.com.cn.

本书咨询联系方式：fengxiaobei@phei.com.cn.

前　言

17 世纪，积分和微分同时得到进一步发展. 由于自然科学中导出的方程大多数是微分方程而非积分方程，因此积分方程一般理论的建立比微分方程晚了近 200 年. 直到 1896 年，沃尔泰拉才最早创立了积分方程的一般理论. 1900 年到 1903 年间，弗雷德霍姆推广了沃尔泰拉的方法，建立了其积分方程理论.

1901 年，希尔伯特得知弗雷德霍姆的这一工作后，立即着手研究积分方程. 他在积分方程的研究中最早洞察到了函数空间的相关理论. 希尔伯特在积分方程方面的工作第一次揭示出积分方程理论的真正意义，是他数学统一观思想的代表，对该领域后来的走向起到了引领作用. 积分方程也成为 20 世纪初的研究热点之一.

由于希尔伯特的数学成就以及对年轻学者的激励和帮助，使得他有一大批的追随者，他们以简化和阐述希尔伯特的工作为主要研究内容. 在 20 世纪数学向着更高的抽象性和统一性发展的趋势下，顺应结构数学发展的潮流，在用现代抽象术语表述希尔伯特思想的过程中，这些追随者们逐渐建立了泛函分析中的抽象函数空间理论.

对函数空间理论的历史进行研究具有重要意义. 首先，函数空间理论是泛函分析的重要内容，对其历史进行研究可以使我们更好地理解泛函分析的历史发展过程. 其次，希尔伯特作为 20 世纪的领头数学家，他的数学思想博大精深. 对其积分方程思想进行研究，有助于我们更好地理解希尔伯特的数学思想和近现代数学思想. 最后，这一研究可以为积分方程和泛函分析的教学提供历史背景，使学生更深刻地理解相关数学知识.

本书以希尔伯特的积分方程工作为切入点，梳理了 20 世纪之初的近 30 年间那些杰出数学家(希尔伯特、施密特、里斯、巴拿赫等)的工作，他们之间相互促进，从具体的积分方程到抽象的函数空间理论的研究全过程，展示了这个重要数学分支从研究的初始阶段到发展成熟，再向更高层次延伸的历史脉络.

本书表述清晰、论述有力、内容丰富，可作为数学类专业的高年级本科生

和研究生学习泛函分析和泛函分析史的参考用书，也可作为科学史工作者和数学爱好者的参考用书.

感谢国家自然科学基金(11726019)以及西北大学科学史学科建设经费的资助. 感谢电子工业出版社谭海平先生和冯小贝编辑对本书出版提供的帮助和建议. 感谢导师曲安京教授的指导和帮助. 写书期间还得到了家人和朋友的大力支持，在此对他们表示诚挚的谢意！尽管作者对书稿进行了多次校对，由于水平有限，不足之处在所难免，敬请各位读者批评指正.

李亚亚 王　昌

2018 年 2 月于西安

目　　录

第 1 章　弗雷德霍姆的积分方程理论

17 世纪，积分和微分同时得到发展，由于自然科学中导出的方程大多数是微分方程而不是积分方程，因而积分方程一般理论的建立比微分方程的晚了 200 年. 直到 1896 年，意大利数学家沃尔泰拉(Vito Volterra，1860—1940)才最早创立了积分方程的一般理论. 1900 年到 1903 年间，瑞典数学家弗雷德霍姆(Ivar Fredholm，1866—1927)推广了沃尔泰拉的方法，运用科克(Helge Von Koch，1870—1924)关于无穷行列式展开的结果，建立了其积分方程理论，开启了积分方程研究的新时代.

1.1　弗雷德霍姆积分方程思想的来源

1909 年，弗雷德霍姆(见图 1.1)在一次演讲中谈到他的积分方程思想来源于两个方面：

(1)灵感来自沃尔泰拉的积分方程思想；

(2)他的工作得益于科克关于无穷行列式展开的成果.

图 1.1　弗雷德霍姆

1.1.1 沃尔泰拉的启发

数学物理中的问题产生了微分方程和积分方程. 个别的包含积分方程的问题出现得比较早. 1822 年，法国数学家傅里叶(Joseph Fourier，1768—1830)在关于热传导的研究中，引入函数 $f(x)$ 的积分变换

$$\varphi(t)=\int_0^{+\infty} f(x)\cos tx\mathrm{d}x$$

当 $\varphi(x)$ 是一个给定函数时，寻找 $f(x)$ 的问题其实就是一个“反演问题”. 他给出了反演公式

$$f(x)=\frac{2}{\pi}\int_0^{+\infty}\varphi(x)\cos tx\mathrm{d}t \tag{1.1}$$

1823 年，挪威数学家阿贝尔(Niels Abel，1802—1829)将一个力学问题转化为在积分方程

$$\int_0^x \frac{\varphi(y)}{\sqrt{x-y}}\mathrm{d}y=f(x)$$

中如何确定未知函数 $\varphi(x)$ 的问题. 他得到解

$$\varphi(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^x \frac{f(y)}{\sqrt{x-y}}\mathrm{d}y \tag{1.2}$$

同时他用 $(x-y)^{\alpha}$（$0<\alpha<1$）代替 $\sqrt{x-y}$，尝试将他的结果扩展到更一般的情形. 阿贝尔被称为最早直接应用并求解了积分方程的人.

在阿贝尔之后，刘维尔(Joseph Liouville，1809—1882)推动了积分方程的发展. 从 1832 年开始，他求解了一些特殊的积分方程. 1837 年，他在论文“第二次关于函数发展的研究报告”中指出，通过求解积分方程，可以得到某些微分方程的解，采用的方法是德国数学家卡尔 · 诺伊曼(Carl Neumann，1832—1925)的逐次代入法.

1894 年，拉 · 鲁(Le Roux，1863—1949)开始研究“定积分的反演”的一般问题. 他想从方程

$$\int_a^y \varphi(x) H(x,y) \mathrm{d}x = f(y) \tag{1.3}$$

中确定出未知函数 $\varphi(x)$. 与前人不同的是，他对求出一个类似于式(1.1)和式(1.2)的反演公式不感兴趣. 他先假设在 $[a,b]$ 上 $h(y) = H(y,y) \neq 0$，对方程(1.3)两边关于 y 求导，可得到

$$h(y)\varphi(y) + \int_a^y \varphi(x) \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) \mathrm{d}x = f'(y) \tag{1.4}$$

再运用逐次逼近法，令

$$u_0(y) = \frac{f'(y)}{h(y)}, \cdots, u_n(y) = \frac{f'(y)}{h(y)} - \frac{1}{h(y)} \int_a^y \frac{\partial H}{\partial y}(x,y) u_{n-1}(x) \mathrm{d}x, \qquad n \geqslant 1$$

他证明了函数列 $\{u_n\}$ 收敛于方程(1.3)的一个解.

继拉 · 鲁之后，沃尔泰拉(见图 1.2)在“定积分的反演”问题上做出了重要贡献. 1882 年，沃尔泰拉获得物理学博士学位. 1884 年，他在研究球面段上电荷分布问题时，首次遇到了积分方程，他的积分方程工作打开了积分方程研究的新局面，一类重要的积分方程是以他的名字来命名的.

图 1.2　沃尔泰拉

1896 年，沃尔泰拉在一系列的文章中处理了沃尔泰拉型积分方程. 在 1896 年 1 月 12 日提交于意大利皇家科学院的第一篇文章中，他给出方程(1.4)的解的表达式

$$\varphi(y)=\frac{f'(y)}{h(y)}-\frac{1}{h(y)}\int_a^y f'(x)\sum_{i=0}^{\infty}S_i(x,y)\mathrm{d}x$$

其中，$S_0(x,y)=\dfrac{1}{h(x)}\dfrac{\partial H}{\partial y}(x,y)$，$S_i(x,y)=-\int_x^y S_0(\xi,y)S_{i-1}(x,\xi)\mathrm{d}\xi$，$i\geqslant 1$. 他用的方法与拉・鲁的一样，不过他当时并不知道拉・鲁的结果. 他还证明了级数 $\sum\limits_{i=0}^{\infty}S_i(x,y)$ 收敛，并且指出第一型沃尔泰拉积分方程均可转化为第二型沃尔泰拉积分方程进行求解.

文章中他用一种新的方法，即“从有限到无限的过渡”来讨论第一型沃尔泰拉积分方程(1.3)的解的情况. 做法是：先把积分区间划分为 n 等分，再用黎曼和代替黎曼积分，这样可以把积分方程(1.3)转化为一个含有 n 个方程、n 个未知数的线性代数方程组

$$\begin{cases}\varphi(y_1)H(y_1,y_1)+\varphi(y_2)H(y_2,y_1)+\cdots+\varphi(y_n)H(y_n,y_1)=f(y_1)\\ \varphi(y_1)H(y_1,y_2)+\varphi(y_2)H(y_2,y_2)+\cdots+\varphi(y_n)H(y_n,y_2)=f(y_2)\\ \cdots\\ \varphi(y_1)H(y_1,y_n)+\varphi(y_2)H(y_2,y_n)+\cdots+\varphi(y_n)H(y_n,y_n)=f(y_n)\end{cases}$$

因此，第一型沃尔泰拉积分方程是线性方程组当未知数的个数趋于无穷时的极限形式.

沃尔泰拉被认为是积分方程一般理论的第一个创立者. 他不仅求解了第二型沃尔泰拉积分方程，而且还揭示出了一个非常重要的原理：线性积分方程与线性方程组之间暗含的类似性. 正是受到沃尔泰拉积分方程工作的启发，弗雷德霍姆认识到第二型弗雷德霍姆积分方程与线性方程组之间暗含的类似性.

1.1.2 科克的成果

由于无穷维线性方程组与微分方程的级数解之间的关系，它最早出现在傅里叶关于热传导的工作中. 傅里叶运用变量分离法求解偏微分方程

$$\Delta V=V_{xx}+V_{yy}=0$$

在区域 $x>0,\ -\dfrac{\pi}{2}<y<\dfrac{\pi}{2}$ 中的解 $V(x,y)$，其中 $V(0,y)=1$. 他的做法是：令

$$V(x,y)=F(x)f(y)$$

则对 $\forall m\in R$，

$$V(x,y)=\mathrm{e}^{-mx}\cos my$$

是方程的一个解. 接着，傅里叶考虑级数

$$V(x,y)=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\mathrm{e}^{-(2m-1)x}\cos(2m-1)y$$

当 $x=0$ 时，关系式

$$1=\sum_{m=1}^{\infty}a_m\cos(2m-1)y \tag{1.5}$$

对所有的 y 都成立. 为了求出该级数中的系数序列 $\{a_m\}$，他先对式(1.5)两边求导数，再令 $y=0$，因而得到了一个关于 a_m 的无穷维线性方程

$$\begin{cases}1=\sum\limits_{m=1}^{+\infty}a_m\\ 0=\sum\limits_{m=1}^{+\infty}(2m-1)^2a_m\\ 0=\sum\limits_{m=1}^{+\infty}(2m-1)^4a_m\\ \quad\cdots\end{cases} \tag{1.6}$$

方程组(1.6)是最早的无穷维线性方程组.

对于这个无穷维线性方程组，傅里叶先考虑前 k 个方程. 当 $m>k$ 时，令 $a_m=0$，再运用克拉默法则求解由这 k 个方程构成的方程组，将得到的解记为 $a_1^{(k)},a_2^{(k)},\cdots,a_k^{(k)}$. 接着他固定 m 并计算出 $\lim\limits_{k\to\infty}a_m^{(k)}$，再令 $a_m=\lim\limits_{k\to\infty}a_m^{(k)}$，由范德蒙行列式的性质可知

$$a_1^{(k)}=\frac{3^2\cdot5^2\cdots(2k-1)^2}{8\cdot24\cdots(4k^2-4k)}$$

从而有 $a_1=\dfrac{4}{\pi}$，他还得到

$$\frac{a_{m+1}^{(k)}}{a_m^{(k)}}=\frac{2m-1}{2m+1}\cdot\frac{m+k}{m-k}$$

从而有

$$a_m = \frac{4\cdot(-1)^{m-1}}{\pi\cdot(2m-1)}$$

由此，可以看出傅里叶已经有从有限维到无穷维过渡的思想，这是他这一工作的重要性所在. 与有限维线性方程组不同，无穷维线性方程组问题不再是一个单纯的代数问题. 因为无穷这一属性，在处理无穷维线性方程组时，必须要考虑收敛性，但是令人遗憾的是，傅里叶在其工作中并没有考虑序列 $\{a_m^{(k)}\}$ 的收敛性问题.

傅里叶的工作之后，无穷维线性方程组在半个世纪里都无人问津，甚至在法国也没有人来研究这一课题. 1886 年，美国天文学家和数学家希尔(George William Hill，1838—1914)在研究月亮运动时，考虑了这样一个微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+\theta u=0 \tag{1.7}$$

其中，$\theta=\theta_0+2\theta_1\cos t+2\theta_2\cos 2t+\cdots$. 如果 $\theta_{-n}=\theta_n$，则 $\theta=\sum_{-\infty}^{+\infty}\theta_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}nt}$. 希尔给出了微分方程(1.7)的一个级数解

$$u=\sum_{-\infty}^{+\infty}\lambda_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}(n+c)t}$$

其中，λ_n 为常数. 他将这个级数解代入到微分方程中得到一个关于系数 λ_n 的无穷维线性方程组

$$\sum_{-\infty}^{+\infty}\theta_{n-k}\lambda_k-(n+c)^2\lambda_n=0,\qquad -\infty<n<+\infty$$

这个方程组比较复杂，因为相应的系数矩阵

$$\begin{pmatrix}
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\
\cdots & \theta_1 & \theta_0-c^2 & \theta_{-1} & \theta_{-2} & \theta_{-3} & \theta_{-4} & \cdots\\
\cdots & \theta_2 & \theta_1 & \theta_0-(1+c)^2 & \theta_{-1} & \theta_{-2} & \theta_{-3} & \cdots\\
\cdots & \theta_3 & \theta_2 & \theta_1 & \theta_0-(2+c)^2 & \theta_{-1} & \theta_{-2} & \cdots\\
 & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots &
\end{pmatrix}$$

在 4 个方向上都是无穷的. 希尔利用类似于有限维情形中行列式作商的方

法，求出了这个无穷维线性方程组的解，在这里他引入了无穷行列式及其运算. 但是同样遗憾的是，希尔仍然没有考虑因无穷这一属性而产生的收敛性问题.

1905 年，庞加莱(Jules Henri Poincaré，1854—1912)这样评述希尔的工作：

“谁敢直接令这些方程的行列式等于零呢？希尔敢这样做，这是一个非常大胆的举动. 当时没有人研究过由无穷多个方程构成的方程组，也没有人研究过无穷阶的行列式. 甚至都没有人知道如何来定义无穷阶的行列式，也不能对这一概念赋予明确的意义. 不过，为了说得更充分些，我必须指出 M. Kötteritzsch 曾接触过无穷维线性方程组这个课题……但是他的论文在科学界几乎无人知晓，无论如何希尔是不知道的……

但是光有勇气是不行的，必须要成功证明才行. 希尔成功避免了困扰他的所有难题，这使得没人能说他的方法有非常明显的错误. 如果方法是不合理的，他会立刻意识到，因为他已经做到了用数值计算而不是用观察来获得结果，这两者可是完全不同的.”

受到希尔工作的鼓舞和启发，庞加莱开始对无穷维线性方程组这一课题感兴趣，并对此进行了研究. 他考虑了无穷矩阵 $\{a_{ij} \mid i, j = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots\}$，其中 $a_{jj} = 1$. 令

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ & \cdots & & \cdots & \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

如果极限 $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n$ 存在，他将其记为行列式 Δ，即 $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta_n = \Delta$. 他也指出行列式 Δ 存在的充分条件是

$$\sum_{\substack{n,p=-\infty \\ n\neq p}}^{+\infty} |a_{np}| < \infty$$

接着庞加莱指出如果用有界序列 $\{b_j\}$ 来代替 Δ_n 中的第 k 列元素，则将得到的新行列式记为 Δ'_n，则 $\lim\limits_{n\to\infty} \Delta'_n = \Delta'$. 庞加莱指出用克拉默法则可以给出无穷维线性方程组

$$\sum_{k=1}^{+\infty} a_{jk}x_k = b_j$$

的唯一的有界解$\{x_k\}$. 最后，他又将其结果扩展到双重无穷维线性方程组

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} a_{jk}x_k = b_j, \qquad -\infty < j < +\infty$$

上，不过仍然限制对所有的j，$a_{jj}=1$. 在庞加莱之前，希尔的工作一直受人质疑，庞加莱的工作完善和扩展了希尔的工作. 庞加莱在他的文章中指出：

“经过我所做的这些工作，相信再没有人对希尔优美的方法有异议.”

与傅里叶、希尔相比，庞加莱最早认识到无穷维线性方程组不再是一个单纯的代数问题，而是与收敛性有关，他也切实考虑了收敛性问题. 庞加莱的工作是对无穷维线性方程组这一课题严格化处理的开端. 继庞加莱之后，科克(见图 1.3)在无穷维线性方程组这一课题上做出重要贡献，他试图拓宽无穷矩阵的研究范围.

图 1.3　科克

科克是瑞典的著名数学家. 1887 年，在斯德哥尔摩大学师从瑞典数学奠基人米塔格-列夫勒(Gösta Mittag-Leffler，1888—1980). 1888 年，科克转学到乌普萨拉大学. 1892 年，他获得博士学位. 1905 年，科克担任了瑞典皇家工学院数学教授. 1911 年，他成为斯德哥尔摩大学的数学教授.

1891 年，科克在其“无穷行列式在线性微分方程理论中的应用”一文中研究了微分方程

$$P(y)=\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n}+P_2(x)\frac{\mathrm{d}^{n-1}y}{\mathrm{d}x^{n-1}}+\cdots+P_n(x)y=0$$

其中，对 $k=2,3,\cdots,n$，每个 $P_k(x)$ 都有洛朗展式

$$P_k(x)=\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}a_{k\lambda}x^{\lambda}$$

这样他可以得出方程的一个级数解为

$$y=\sum_{\lambda=-\infty}^{+\infty}g_{\lambda}x^{\lambda+\rho}$$

他需要确定出该级数中的系数 g_λ，科克通过计算得到了形如庞加莱考虑过的无穷矩阵，但是他只能在一些假设条件下才能运用庞加莱的结果得到 g_λ 的表达式.

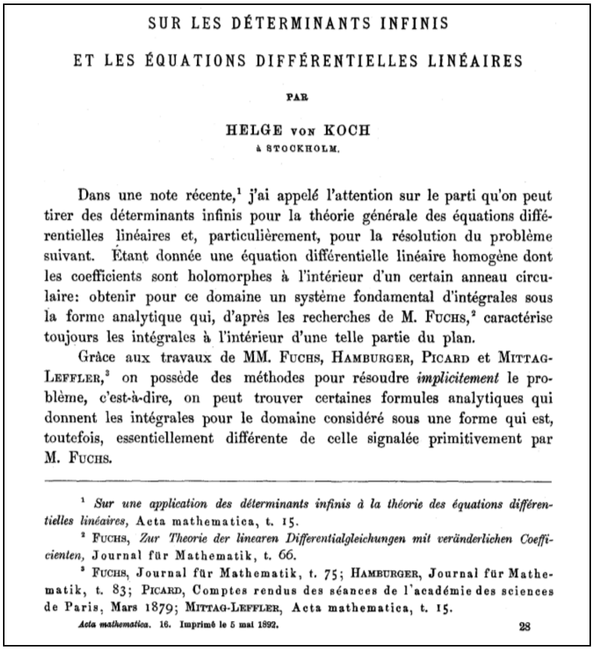
1892 年，科克为了消除这些限制条件，重新研究了无穷维线性方程组这一课题. 他发表了论文“无穷行列式和线性微分方程”（见图 1.4），这篇论文长达 79 页，文章引言中提到了科克 1891 年的文章以及前面提到的希尔和庞加莱在无穷维线性方程组课题方面的文章. 该论文包括两个部分. 第一部分有两章，分别题为“无穷行列式的一些性质”和“无穷维线性方程组的可解性”，主要讨论了无穷维的矩阵行列式和相关的线性方程组解的情况. 第二部分是关于微分方程的，也包含两章，分别题为“线性微分方程的积分”和“线性微分方程的不变式”.

科克通过考虑无穷数组 $A=\{A_{ij};\ i,j=0,\pm1,\pm2,\cdots\}$ 来开始研究. 首先他令

$$D_m=\det\{A_{ij};\ i,j=-m,\cdots,m\}$$

如果极限 $D=\lim D_m$ 存在且有限，他称其为 A 的行列式，否则称 A 的行列式发散. 与有限维矩阵不同的是，相同的无穷数组可以产生可列多个无穷矩阵，它们有相同的主对角元素. 若 A_{00} 为原点，则相同的无穷矩阵可能有不同的原点. 只有选定无穷矩阵的原点，才能确定行列式的值. 因此科克需要证明无穷行列式的收敛与原点的选取无关，他在文章中做到了这一点.

有限维行列式可以按一行或一列来展开，无穷行列式是否也能展开呢？科



SUR LES DÉTERMINANTS INFINIS

ET LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES LINÉAIRES

PAR

HELGE von KOCH

à STOCKHOLM.

Dans une note récente,[1] j'ai appelé l'attention sur le parti qu'on peut tirer des déterminants infinis pour la théorie générale des équations différentielles linéaires et, particulièrement, pour la résolution du problème suivant. Étant donnée une équation différentielle linéaire homogène dont les coefficients sont holomorphes à l'intérieur d'un certain anneau circulaire: obtenir pour ce domaine un système fondamental d'intégrales sous la forme analytique qui, d'après les recherches de M. Fuchs,[2] caractérise toujours les intégrales à l'intérieur d'une telle partie du plan.

Grâce aux travaux de MM. Fuchs, Hamburger, Picard et Mittag-Leffler,[3] on possède des méthodes pour résoudre *implicitement* le problème, c'est-à-dire, on peut trouver certaines formules analytiques qui donnent les intégrales pour le domaine considéré sous une forme qui est, toutefois, essentiellement différente de celle signalée primitivement par M. Fuchs.

[1] *Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires,* Acta mathematica, t. 15.

[2] Fuchs, *Zur Theorie der linearen Differentialgleichungen mit veränderlichen Coefficienten,* Journal für Mathematik, t. 66.

[3] Fuchs, Journal für Mathematik, t. 75; Hamburger, Journal für Mathematik, t. 83; Picard, Comptes rendus des séances de l'académie des sciences de Paris, Mars 1879; Mittag-Leffler, Acta mathematica, t. 15.

Acta mathematica. 16. Imprimé le 5 mai 1892. 28

图 1.4 “无穷行列式和线性微分方程”一文的首页

克在无穷行列式展开方面取得了一些成果，他指出

$$D=\sum \pm \cdots A_{-m,-m}\cdots A_{0,0}\cdots A_{m,m}\cdots$$

显然上式中的每一项是取自不同行、不同列的元素的乘积，这类似于有限维行列式的定义. 科克对 D 建立了关于较小值的展开式，科克的较小值类似于行列式中的代数余子式。若想将 D 按第 i 行关于较小值展开，则需要在 $j\neq i$ 时，用 0 代替 A_{jk} ，用 1 代替 A_{ik} ，由此得到的行列式表示为

$$adjA_{ik}=\frac{\partial D}{\partial A_{ik}}=\begin{pmatrix} i \\ k \end{pmatrix}=\alpha_{ik}$$

他称 α_{ik} 为较小值或一阶子行列式. 因此

$$D=\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{ik}\alpha_{ik}$$

这类似于有限维矩阵按第 i 行关于代数余子式的展开式. 较小值 α_{ik} 可以通过划去 A 的第 i 行和第 k 列得到新的行列式 D' 来计算，即 $\alpha_{ik}=(-1)^{i-k}D'$.

这个方法也可以推广到 D 按两行(或列)或更多行(或列)的展开式中. 如果希望按第 i 行和第 m 行来展开，则需要在 A 中用 1 替换 A_{ik} 和 A_{mn}，用 0 替换第 i 行和第 m 行中的其他元素，这样得到的新矩阵的行列式被称为二阶较小值，表示为 $\begin{pmatrix} i & m \\ k & n \end{pmatrix}$，这样 D 的展开式可以写成

$$D=\sum_k\sum_n\begin{vmatrix} A_{ik} & A_{in} \\ A_{mk} & A_{mn}\end{vmatrix}\begin{pmatrix} i & m \\ k & n \end{pmatrix}$$

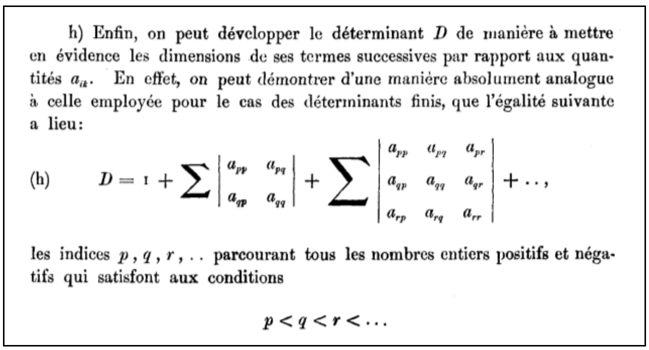
其中，$-\infty<n<+\infty$ 且 $k<n$.

同样，用 1 替换 A 中的元素 $A_{i_1k_1},A_{i_2k_2},\cdots,A_{i_rk_r}$，用 0 替换第 $i_1,i_2,\cdots,i_r$ 行上的其他元素，可构造出 r 阶较小值，并得到 D 关于 r 阶较小值的展开式，r 阶较小值也可以计算出来.

科克在其文章中给出了 D 的一种展开式

$$D=1+\sum_{p=-\infty}^{+\infty}a_{pp}+\sum_{p<q}\begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq}\end{vmatrix}+\sum_{p<q<r}\begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} & a_{pr} \\ a_{qp} & a_{qq} & a_{qr} \\ a_{rp} & a_{rq} & a_{rr}\end{vmatrix}+\cdots \tag{1.8}$$

其中，每一项的最大和数的指标取遍所有整数(见图 1.5)①. 对无穷行列式来说，这个表达式非常重要，文中科克只是给出了具体形式，并没有证明它.



h) Enfin, on peut développer le déterminant D de manière à mettre en évidence les dimensions de ses termes successives par rapport aux quantités a_{ik}. En effet, on peut démontrer d'une manière absolument analogue à celle employée pour le cas des déterminants finis, que l'égalité suivante a lieu:

(h) $$D=1+\sum\begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} \\ a_{qp} & a_{qq}\end{vmatrix}+\sum\begin{vmatrix} a_{pp} & a_{pq} & a_{pr} \\ a_{qp} & a_{qq} & a_{qr} \\ a_{rp} & a_{rq} & a_{rr}\end{vmatrix}+\cdots,$$

les indices $p, q, r, \ldots$ parcourant tous les nombres entiers positifs et négatifs qui satisfont aux conditions

$$p<q<r<\ldots$$

图 1.5　科克建立的展开式②

① 展开式右边的第二项没有写出来，这可能是一个印刷错误.

② 摘自科克的文章“无穷行列式和线性微分方程”.

研究了无穷行列式的展开之后，科克研究了含有无穷多个未知量，由无穷多个方程构成的线性方程组的解的情况，不过他只考虑了齐次情形

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{ik} x_k = 0 \quad (i = -\infty, \cdots, +\infty) \tag{1.9}$$

其中，$D = \det\{A_{ik}\}$ 是正规形式，即 $\{A_{ik}\}$ 满足 $\sum_{i=-\infty}^{+\infty}\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |A_{ik}| < \infty$.

与处理有限维方程组一样，科克分两种情形，即 $D \neq 0$ 和 $D = 0$ 来考虑方程组(1.9)的解的情况. 第一种情形下方程的解为零，用科克的话来说，就是没有解. 在第二种情况下，除非 $A_{ik} \equiv 0$，否则对某个 m 都存在一个非零的 m 阶较小值. 若假设 r 是不为零的较小值的最小阶数，则小于 r 阶的每个较小值都为零. 由较小值的关系式，得出方程(1.9)的解可以由下面有关较小值的表达式来给出，

$$\begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k_1 & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} x_k = \begin{pmatrix} i_1 & i_2 & \cdots & i_r \\ k & k_2 & \cdots & k_r \end{pmatrix} x_{k_1} + \cdots + \begin{pmatrix} i_1 & \cdots & i_{r-1} & i_r \\ k_1 & \cdots & k_{r-1} & k \end{pmatrix} x_{k_r}$$

其中，$k = -\infty, \cdots, +\infty$.

科克得到的这些结果在形式上与有限维情形非常相似，可以说他在试图将有限维的结果推广到无穷维的情形，这些工作在无穷行列式理论的发展中具有重要意义. 弗雷德霍姆以科克关于无穷行列式的展开式为基础定义了弗雷德霍姆行列式，再利用积分方程与无穷维线性方程组之间的类似性来求解他所研究的一类积分方程. 由此可以说，科克关于无穷维行列式的工作为弗雷德霍姆的积分方程研究奠定了先决条件.

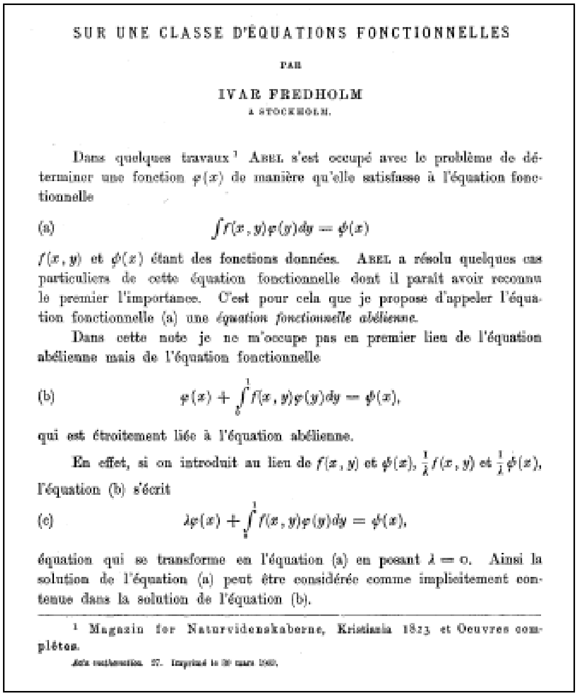
1.2 弗雷德霍姆的积分方程理论

1903 年，为了求解狄利克雷问题，弗雷德霍姆发表了论文“一类泛函方程”(见图 1.6). 他在文章中研究了第二型弗雷德霍姆积分方程

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = \psi(x) \tag{1.10}$$

其中，$f(x,y)$, $\psi(x)$ 是已知的连续函数，$\varphi(y)$ 是待确定的未知函数.

那么，弗雷德霍姆如何来建立其积分方程理论呢？



SUR UNE CLASSE D'ÉQUATIONS FONCTIONNELLES

PAR

IVAR FREDHOLM
À STOCKHOLM.

Dans quelques travaux[1] Abel s'est occupé avec le problème de déterminer une fonction $\varphi(x)$ de manière qu'elle satisfasse à l'équation fonctionnelle

(a) $$\int f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x)$$

$f(x,y)$ et $\psi(x)$ étant des fonctions données. Abel a résolu quelques cas particuliers de cette équation fonctionnelle dont il paraît avoir reconnu le premier l'importance. C'est pour cela que je propose d'appeler l'équation fonctionnelle (a) une *équation fonctionnelle abélienne.*

Dans cette note je ne m'occupe pas en premier lieu de l'équation abélienne mais de l'équation fonctionnelle

(b) $$\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x),$$

qui est étroitement liée à l'équation abélienne.

En effet, si on introduit au lieu de $f(x,y)$ et $\psi(x)$, $\frac{1}{\lambda}f(x,y)$ et $\frac{1}{\lambda}\psi(x)$, l'équation (b) s'écrit

(c) $$\lambda\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)dy = \psi(x),$$

équation qui se transforme en l'équation (a) en posant $\lambda = 0$. Ainsi la solution de l'équation (a) peut être considérée comme implicitement contenue dans la solution de l'équation (b).

[1] Magazin for Naturvidenskaberne, Kristiania 1823 et Oeuvres complètes.

Acta mathematica. 27. Imprimé le 29 mars 1903.

图 1.6 “一类泛函方程”一文的首页

受到沃尔泰拉的启发，弗雷德霍姆将积分方程(1.10)看成是形如$(I+F)U=V$的无穷维线性方程组，但是他并没有写出这个方程组，而是将积分方程(1.10)等价地转换为

$$S_f\varphi(x)=\psi(x)$$

其中，S_f为对应于$f(x,y)$的变换. 再根据矩阵方程理论分三步建立了其积分方程理论.

1.2.1　定义“系数行列式”

在线性方程组理论中，方阵

$$I+F=\begin{pmatrix} 1+a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & 1+a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & 1+a_{nn} \end{pmatrix}$$

的行列式

$$|I+F|=1+\frac{1}{1!}\sum_{r_1}a_{r_1r_1}+\frac{1}{2!}\sum_{r_1,r_2}\begin{vmatrix}a_{r_1r_1} & a_{r_1r_2}\\ a_{r_2r_1} & a_{r_2r_2}\end{vmatrix}+\cdots+\frac{1}{n!}\sum_{r_1,r_2,\cdots,r_n}\begin{vmatrix}a_{r_1r_1} & a_{r_1r_2} & \cdots & a_{r_1r_n}\\ a_{r_2r_1} & a_{r_2r_2} & \cdots & a_{r_2r_n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ a_{r_nr_1} & a_{r_nr_2} & \cdots & a_{r_nr_n}\end{vmatrix}$$

当$n\to+\infty$时，这个行列式就是科克对无穷行列式展开的结果式(1.8). 在论文第一章“基础泛函方程的行列式的构造及它们的性质特征”的第一节中，弗雷德霍姆首先定义了n阶方阵行列式

$$f\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}f(x_1,y_1) & f(x_1,y_2) & \cdots & f(x_1,y_n)\\ f(x_2,y_1) & f(x_2,y_2) & \cdots & f(x_2,y_n)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ f(x_n,y_1) & f(x_n,y_2) & \cdots & f(x_n,y_n)\end{vmatrix}$$

然后对线性积分方程(1.10)定义了“系数行列式”D_f (见图 1.7):

$$D_f=1+\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}\int_0^1\cdots\int_0^1 f\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ x_1 & x_2 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\mathrm{d}x_1\cdots\mathrm{d}x_n$$

在这篇论文中，弗雷德霍姆明确指出：

“D_f在积分方程(1.10)中的作用与行列式在线性方程组中的作用一样.”

在其论文第一章的第二节，弗雷德霍姆证明了D_f收敛. 1893 年，阿达玛(Hadamard，1865—1963)建立了这样一个定理：

如果$|A|$是n阶方阵$A=(a_{ij})$的行列式，则$|A|^2\leqslant\left(\sum_{p=1}^{n}a_{1p}\right)^2\left(\sum_{p=1}^{n}a_{2p}\right)^2\cdots\left(\sum_{p=1}^{n}a_{np}\right)^2$.

根据阿达玛的定理，弗雷德霍姆指出如果F为$f(x,y)$的上界，则有

$$\left|f\begin{pmatrix}x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n\end{pmatrix}\right|\leqslant\sqrt{n^n}F^n$$

故

$$D_f \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{n!} F^n$$

由于级数 $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sqrt{n^n}}{n!} F^n$ 绝对收敛，所以 D_f 收敛. 在积分方程理论中称 D_f 为弗雷德霍姆行列式.

Pour définir D_f j'introduis la notation abrégée

$$(1)\qquad f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ y_1, y_2, \dots, y_n \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} f(x_1, y_1) & f(x_1, y_2) & \dots & f(x_1, y_n) \\ f(x_2, y_1) & f(x_2, y_2) & \dots & f(x_2, y_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ f(x_n, y_1) & f(x_n, y_2) & \dots & f(x_n, y_n) \end{vmatrix}$$

et je pose

$$(2)\qquad D_f = 1 + \int_0^1 f(x, x)dx + \frac{1}{\underline{|2}} \int_0^1 \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1, x_2 \\ x_1, x_2 \end{pmatrix} dx_1 dx_2 + \dots$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{\underline{|n}} \int_0^1 \dots \int_0^1 f\begin{pmatrix} x_1, x_2, \dots, x_n \\ x_1, x_2, \dots, x_n \end{pmatrix} dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

图 1.7　弗雷德霍姆定义的系数行列式①

1.2.2　讨论“系数矩阵的秩”

在其论文第一章的第四节，弗雷德霍姆定义了 D_f 的较小值(类似于行列式的余子式)为

$$D_f \begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}$$

$$= f\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix} + \sum_{p=1}^{+\infty} \frac{1}{p!} \int_0^1 \cdots \int_0^1 f\begin{pmatrix} \xi_1 & \cdots & \xi_n & x_1 & \cdots & x_p \\ \eta_1 & \cdots & \eta_n & x_1 & \cdots & x_p \end{pmatrix} \mathrm{d}x_1 \cdots \mathrm{d}x_p$$

在其论文第一章的第五节，他指出 D_f 的较小值满足关系式：

① 摘自弗雷德霍姆的文章“一类泛函方程”.

$$D_f\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}+\int_0^1 f(\xi_1,\tau)D_f\begin{pmatrix}\tau & \xi_2 & \cdots & \xi_n\\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau$$

$$=f(\xi_1,\eta_1)D_f\begin{pmatrix}\xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_n\\ \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}-f(\xi_1,\eta_2)D_f\begin{pmatrix}\xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_n\\ \eta_1 & \eta_3 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}+\cdots \tag{1.11}$$

和

$$D_f\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}+\int_0^1 f(\tau,\eta_1)D_f\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n\\ \tau & \eta_2 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau$$

$$=f(\xi_1,\eta_1)D_f\begin{pmatrix}\xi_2 & \xi_3 & \cdots & \xi_n\\ \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}-f(\xi_2,\eta_1)D_f\begin{pmatrix}\xi_1 & \xi_3 & \cdots & \xi_n\\ \eta_2 & \eta_3 & \cdots & \eta_n\end{pmatrix}+\cdots \tag{1.12}$$

当$n=1$时，有

$$D_f\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+\int_0^1 f(\xi,\tau)D_f\begin{pmatrix}\tau\\ \eta\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau=f(\xi,\eta)D_f \tag{1.13}$$

和

$$D_f\begin{pmatrix}\xi\\ \eta\end{pmatrix}+\int_0^1 f(\tau,\eta)D_f\begin{pmatrix}\xi\\ \tau\end{pmatrix}\mathrm{d}\tau=f(\xi,\eta)D_f \tag{1.14}$$

弗雷德霍姆按照庞加莱在 1896 年用过的一个技巧，在其论文第一章第六节中引进了一个参数λ，用$\lambda f(x,y)$代替D_f中的$f(x,y)$. 他也指出$D_{\lambda f}$可以展成一个关于λ的幂级数. 由阿达玛定理可知，这个幂级数对所有的λ值都是收敛的，因而$D_{\lambda f}$是一个整函数，进而方程$D_{\lambda f}=0$的每个根的重数必须是有限的，那么就找不到一个λ值，使得$D_{\lambda f}$和它的所有导数都为零. 再由D_f和它的较小值的定义，可以得到对$n=1,2,3,\cdots$都成立的关系式

$$\lambda^n\frac{d^n D_{\lambda f}}{d\lambda^n}=\int_0^1\cdots\int_0^1 D_{\lambda f}\begin{pmatrix}x_1 & \cdots & x_n\\ x_1 & \cdots & x_n\end{pmatrix}\mathrm{d}x_1\mathrm{d}x_2\cdots\mathrm{d}x_n \tag{1.15}$$

当λ=1时，有$D_{\lambda f}=D_f=0$，根据上面的结论可知，式(1.15)左边不恒为零，那么就能够找到D_f的一个不恒为零的较小值.

弗雷德霍姆的较小值类似于行列式的余子式，所以说不恒为零的较小值的

最小阶数其实就是一个类似于线性方程组的系数矩阵的秩. 讨论线性方程组的系数矩阵A的秩,判断它与A的增广矩阵的秩之间的关系是求解代数方程$Ax=b$的重要环节.

1.2.3　分两种情形处理方程

在其论文第二章“一类泛函变换及其逆”中，弗雷德霍姆分$D_f \neq 0$和$D_f = 0$两种情形来求积分方程(1.10)的解.

当$D_f \neq 0$时，弗雷德霍姆指出

$$S_g\psi(x) = S_g S_f \varphi(x) = S_F \varphi(x)$$

其中，积变换S_F是函数$F(x,y) = g(x,y) + f(x,y) + \int_0^1 g(x,t) f(t,y)\mathrm{d}t$所对应的变换. 他也指出所有变换$S_f$的集合在这个乘法运算下可以构成一个群，即变换构成的集合在乘法运算下是封闭的，且存在单位元和逆元. 群是数学中的第一个抽象概念，虽然它的历史可以追溯到很久以前，但是直到 19 世纪末，数学家才对它有了比较清楚的认识. 弗雷德霍姆指出所有的变换可以构成一个群，这一想法要比与他同时代的人提前了近 30 年，它可以看成是算子代数早期思想的萌芽.

如果令

$$g(x,y) = -\frac{D_f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_f}$$

则有

$$F(x,y) = -\frac{D_f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_f} + f(x,y) + \int_0^1 -\frac{D_f\begin{pmatrix} x \\ t \end{pmatrix}}{D_f} f(t,y)\mathrm{d}t$$

由式(1.13)可以得出

$$S_g S_f \psi(x) = \psi(x)$$

即 $S_g S_f = I$. 另一方面，用 $S_g\psi(x)$ 代替 $\varphi(x)$，可以得到

$$S_f\varphi(x) = S_f S_g\psi(x) = S_G\psi(x)$$

由式(1.14)可以得出

$$S_f S_g\psi(x) = \psi(x)$$

从而有 $S_f S_g = S_g S_f = I$，故 S_g 为 S_f 的逆. 弗雷德霍姆建立了这样一个定理：当 $D_f \neq 0$ 时，积分方程(1.10)有唯一解

$$\varphi(x) = S_g\psi(x) = \psi(x) - \int_0^1 \frac{D_f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}}{D_f}\psi(y)\mathrm{d}y$$

当 $D_f = 0$ 时，存在 D_f 的最小阶的较小值不恒等于零，设 $D_f\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}$ 就是这个最小阶的较小值. 因为所有比这个最小阶的较小值更小的较小值都为零，所以式(1.11)为

$$D_f\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix} + \int_0^1 f(\xi_1,\tau) D_f\begin{pmatrix} \tau & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}\mathrm{d}\tau = 0$$

也就是说

$$\varphi(x) = D_f\begin{pmatrix} x & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}$$

是积分方程(1.10)相应的齐次方程

$$\varphi(x) + \int_0^1 f(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y = 0 \tag{1.16}$$

的解.

引入 S_f 的伪逆 S_g，其中

$$g(x,y) = \frac{D_f\begin{pmatrix} x & \xi_1 & \cdots & \xi_n \\ y & \eta_1 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}}$$

这里的参数 ξ_i 和 η_i 的选取要保证分母不等于零. 因为

$$S_g S_f \varphi(x) = S_F \varphi(x) = 0$$

其中

$$F(x,y) = f(x,y) + g(x,y) + \int_0^1 g(x,t) f(t,y) \mathrm{d}t$$

由式(1.12)可知

$$F(x,y) = -\sum_{k=1}^{n} f(x_k, y) \Phi_k(x)$$

其中

$$\Phi_1(x) = -\frac{D_f\begin{pmatrix} x & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}}$$

$$\Phi_2(x) = +\frac{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 & x & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}}{D_f\begin{pmatrix} \xi_1 & \xi_2 & \cdots & \xi_n \\ \eta_1 & \eta_2 & \cdots & \eta_n \end{pmatrix}}$$

$$\vdots$$

弗雷德霍姆指出 $\Phi_1(x), \Phi_2(x), \cdots, \Phi_n(x)$ 是线性无关的. 又因为

$$S_F \varphi(x) = 0 \Leftrightarrow \varphi(x) + \int_0^1 F(x,y) \varphi(y) \mathrm{d}y = 0$$

所以

$$\begin{aligned} \varphi(x) &= -\int_0^1 F(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y \\ &= -\sum_{k=1}^{n} \Phi_k(x) \int_0^1 f(\xi_k, y)\varphi(y)\mathrm{d}y \\ &= \sum_{k=1}^{n} A_k \Phi_k(x) \end{aligned}$$

因此，他得到$\Phi_1(x),\Phi_2(x),\cdots,\Phi_n(x)$是齐次积分方程$S_f\varphi(x)=0$的一组线性无关解，它们可以看成是解空间的一组基，从而该齐次方程的解可以表示为它们的线性组合. 于是，弗雷德霍姆对积分方程(1.10)相应的齐次方程(1.16)得到这样一个定理：

齐次方程$S_f\varphi(x)=0$有非零解的充分必要条件为$D_f=0$，若n是D_f不恒为零的较小值的最小阶数，则该齐次方程有n个线性无关解.

接下来，他研究了积分方程(1.10)在$D_f=0$时解的情况，得出积分方程(1.10)可解的充分必要条件为$\psi(x)$正交于“转置”齐次方程

$$\alpha(x)+\int_0^1 f(y,x)\alpha(y)\mathrm{d}y=0$$

的n个线性无关解$\alpha_1,\alpha_2,\cdots,\alpha_n$，即

$$\int_0^1\psi(x)\alpha_p(x)\mathrm{d}x=0,\qquad p=1,2,\cdots,n$$

弗雷德霍姆分两种情形得到的结果就是著名的弗雷德霍姆择一定理，该定理表明积分方程要么具有唯一解，要么相应的齐次积分方程有非零解. 著名数学家查理德·柯朗(Richard Courant，1888—1972)在其名著《数学物理方法》中这样来评述弗雷德霍姆择一定理：

“积分方程一般理论中的基本定理(即弗雷德霍姆择一定理)是由弗雷德霍姆最早证明的，它们和线性方程理论中的基本定理相当.”

弗雷德霍姆的文章“一类泛函方程”共有六章，第三章题为“行列式D_f的第一变分”，讨论了一些变分问题. 第四章题为“积定理”，他在这一章指出对积分方程的任意两个核$f(x,y)$和$g(x,y)$，如果D_f和D_g分别是它们的“行列式”，则有

$$D_fD_g=D_F$$

其中，$F(x,y)=g(x,y)+f(x,y)+\int_0^1 g(x,t)f(t,y)\mathrm{d}t$. 这个公式表明他选用“行列式”这个术语是正确的. 第五章题为“各种展开式”，第六章题为“$f(x,y)$无界但$(x-y)^\alpha f(x,y)$仍然是有界的情形”，在这一章指出他的结果可以推广到核

$f(x,y)$ 不是有界的情形上，但 $(x-y)^{\alpha}f(x,y)$（$0<\alpha<1$）必须有界.

积分方程起源于数学物理问题，其发展也与数学物理紧密相关. 它是泛函分析的重要来源之一，泛函分析中很多重要的数学思想和概念最初都来源于积分方程. 积分方程理论对数学家提供了三个重要概念，即

(1) 求解狄利克雷问题；

(2) 线性方程组从有限维向无穷维的推广（见本书第 3 章）；

(3) 无穷维函数空间理论的逐渐形成和发展（见本书第 5 章和第 6 章）.

弗雷德霍姆的一生发表的论文不多，多数集中在数学物理中的方程上. 他对应用数学有着持久的兴趣，这一兴趣贯穿了他的一生. 那么，他为什么要研究这样的一个第二型弗雷德霍姆积分方程呢？

对此，弗雷德霍姆在文章中写道:

“因为导致线性微分方程的大多数数学物理问题都可以转换成积分方程(1.10)或 $\varphi(x_1\cdots x_n)+\int\cdots\int f(x_1\cdots x_n,\xi_1\cdots\xi_n)\varphi(\xi_1\cdots\xi_n)\mathrm{d}\xi_1\cdots\mathrm{d}\xi_n=\psi(x_1\cdots x_n)$，所以它们应该受到数学家的特别关注.

在文中我所研究的方程可以将沃尔泰拉的方程视为特例.”

他的学生也说道：

“如果要问在弗雷德霍姆的眼里，他的工作中最本质的基础是什么的话，回答一定是位势理论……在 1895 年的一次研讨课上，他讨论了狄利克雷问题……两年后，在斯德哥尔摩大学的课堂上，进行了一场生动的讨论，内容是关于拉・鲁的主要方法以及它与沃尔泰拉方程之间的联系. 最终，经过一段时间的沉默后，弗雷德霍姆以他一贯慢吞吞的语气说: ‘位势理论中也有这样一个积分方程.’”

其实，早在 1860 年左右，贝尔（August Beer，1825—1863）利用双层位势求解狄利克雷问题时，导出了未知密度 $\rho(M)$ 满足的一个第二型弗雷德霍姆积分方程

$$2\pi\rho(M)+\iint_{\Sigma}\rho(P)\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{MP}\right)\mathrm{d}\sigma=g(M)$$

其中，Σ 为光滑曲面，MP 为 M 与 P 之间的距离. 这是最早出现的第二型弗雷

德霍姆积分方程. 当时贝尔用逐次逼近法求解了这个积分方程. 与贝尔得到的积分方程相比，弗雷德霍姆的积分方程在形式上比较简单. 这种简单的形式对他建立其理论起到了至关重要的作用.

1899 年，弗雷德霍姆在他的老师米塔格-列夫勒的安排下去法国巴黎访学. 法国有很好的数学传统和氛围，他在访学期间接触了法国几乎所有的大分析学家，如庞加莱、皮卡(Emile Picard，1856—1941)和阿达玛等. 在访学期间，弗雷德霍姆完成了其积分方程理论中的重要部分. 他的工作受到庞加莱的影响，也用到了阿达玛的一些成果. 由此可以说，访学期间的交流学习为弗雷德霍姆研究积分方程提供了一个良好的契机.

弗雷德霍姆的文章短小精炼、视角新颖，他在积分方程研究中采用的新颖视角远比那些清晰的公式要重要. 他用一种创造性的、优美的方法求解了第二型弗雷德霍姆积分方程，他的方法揭示出积分方程与线性方程组之间暗含的类似性. 他用变换将积分方程进行转换，其实就是转换为算子方程，这预示了积分方程可用抽象空间上的积分算子来表述，并可用泛函分析的方法来研究，这是积分方程发展的一个趋势. 他对积分方程建立了择一定理，并通过其择一定理不仅表明了解在什么时候存在，而且刻画了解的非唯一性. 弗雷德霍姆因在积分方程方面做出的卓越贡献，获得了“巴黎科学院奖”.

弗雷德霍姆的工作激发了希尔伯特(David Hilbert，1862—1943)对积分方程的极大兴趣(见本书第 2 章)，这是这一工作的另一个重要意义. 1910 年秋，在匈牙利科学院颁发“鲍耶奖”时，庞加莱作为评奖委员会的秘书，这样来描述弗雷德霍姆的积分方程工作：

“弗雷德霍姆的发现肯定是当代最值得注意的数学成果之一……希尔伯特做了重要的改进，他这项工作的简单、明确和一般的特性是值得称道的.”

第 2 章　希尔伯特对积分方程的早期探索

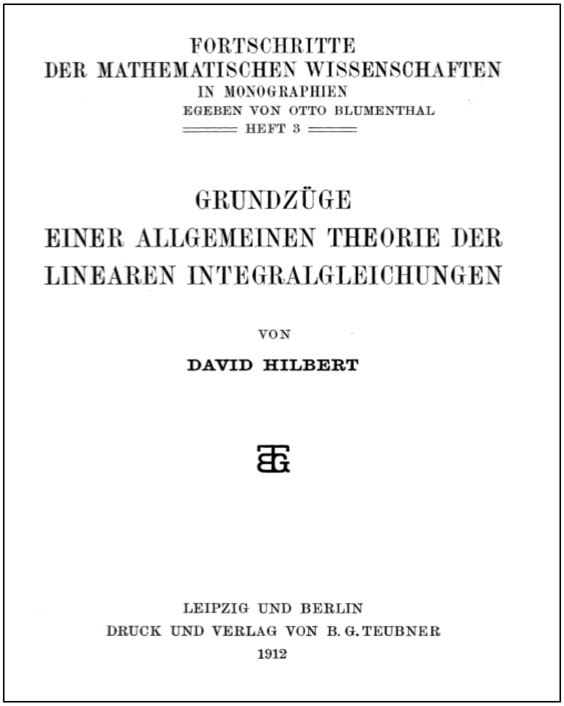
在弗雷德霍姆工作(见第 1 章)的基础上，希尔伯特认识到积分方程可以作为新的数学工具，用于解决分析学和物理学领域中过去不能解决的一些问题. 在 1904 年发表的关于积分方程研究的第一篇文章中，希尔伯特从二次型主轴化的代数理论出发，通过极限过渡的方法，对对称核积分方程建立了特征值理论. 在第二篇文章中，他把微分方程的施图姆-刘维尔边值问题转化为积分方程问题. 因此，积分方程成为求解常微分方程和偏微分方程的一种重要方法.

2.1　希尔伯特研究积分方程的原因

20 世纪初，由于在代数和几何上做出的巨大贡献，希尔伯特(见图 2.1)已经是一个享有盛誉的数学家了. 著名的巴黎会议之后，希尔伯特开始探讨分析学问题. 分析学在很多重要方面与他之前研究过的代数和几何不同. 如代数中通常只涉及有限多个变量的运算，且可以在有限步内完成；分析学则涉及连续量的运算，往往要考虑收敛性. 1900 年冬天，希尔伯特从瑞典数学家霍姆格林(Erik Albert Holmgren，1872—1943)那里了解到弗雷德霍姆最近关于积分方程的工作. 于是，他立即组织研讨班，开始研究积分方程，并就此课题指导博士生.

图 2.1　希尔伯特

从 1904 年到 1910 年间，希尔伯特在《哥廷根自然科学皇家学会报告》上共发表了六篇关于积分方程的文章. 1912 年，在补充了 20 多页的前言后，希尔伯特将这六篇文章合并编辑为《线性积分方程一般理论基础》一书(见图 2.2)出版，六篇文章即对应书中的六章. 这本书对数学的发展产生了深远的影响，不仅极大地推动了积分方程理论的全面发展，而且为后来泛函分析的建立奠定了坚实的基础.


FORTSCHRITTE
DER MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN
IN MONOGRAPHIEN
EGEBEN VON OTTO BLUMENTHAL
HEFT 3

GRUNDZÜGE
EINER ALLGEMEINEN THEORIE DER
LINEAREN INTEGRALGLEICHUNGEN

VON
DAVID HILBERT

LEIPZIG UND BERLIN
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER
1912

图 2.2 《线性积分方程一般理论基础》一书

本章基于希尔伯特的这本书的第一章和第二章展开研究.

1899 年，希尔伯特以挽救狄利克雷原理为标志进入分析学领域。1901 年，他为什么在得知弗雷德霍姆的工作后立即开始研究积分方程呢？

在热传导的研究中，傅里叶断言“任意”函数可以关于三角函数展开. 从此数学家对函数展开的研究一直没有间断过. 傅里叶的三角级数展开为函数展开提供了样板，以后的发展只是把正弦函数和余弦函数换成更为一般的函数. 1836 年，瑞士数学家施图姆(Charles-François Sturm，1803—1855)和法国数学家刘维尔为推广傅里叶的工作，在一个二阶常微分方程上建立了施图姆-刘维尔理论.

这个理论是第一个特征值理论，它首次明确提出了特征值、特征函数问题. 斯图姆和刘维尔一开始就为他们的理论构建了一个很好的框架，研究的问题可以归纳为三点：

(1) 方程的特征值 λ_i 有无穷多个，且都是实数，按顺序可排列为 $\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots$；

(2) 对应于不同特征值的特征函数相互正交；

(3) 函数关于特征函数的展开式，是傅里叶展开的推广.

在他们合作建立该理论的过程中，施图姆主要关注于前两个问题，刘维尔则更关注于第三个问题，不过他们的工作也有一些重叠.

常微分方程上的施图姆–刘维尔理论建立后，分析学家用了 60 年的时间才将其推广到薄膜振动的偏微分方程上. 对此韦伯(Wilhelm Eduard Weber，1804—1891)、施瓦兹(Karl Hermann Amandus Schwarz，1843—1921)和庞加莱做出了重要贡献.

通过直觉上对不同数学分支之间以及数学与物理之间基本关系的掌握，希尔伯特认识到弗雷德霍姆积分方程可以解决分析和物理学领域里一些过去不能解决的问题. 他在弗雷德霍姆积分方程工作的基础上清晰地认识到：

(1) 对于给定的区域 G 及位势方程 $\Delta u = 0$，通过边界上的弗雷德霍姆积分方程构造出格林函数后，振动膜的微分方程 $\Delta\phi + \lambda\phi = 0$ 转化为具有对称核 $K(s,t)$ 的齐次积分方程

$$\phi(s) - \lambda\int_a^b K(s,t)\,\phi(t)\mathrm{d}t = 0 \tag{2.1}$$

这里 λ 不再是人为引进的，而是有本质意义.

(2) 确定这个对称核积分方程的“特征值”λ 和“特征函数”$\phi(s)$ 的问题相当于 n 元二次型对角化的积分.

对于积分方程理论对整个分析学发展的重要性，希尔伯特在其书中第一章引言的第三段写道：

“通过对这一课题(指线性积分方程)的研究，我认识到线性积分方程一般理论的系统发展对定积分理论、任意函数的无穷级数展开理论、线性微分方程

理论、位势理论和变分法，甚至对整个分析学的发展都非常重要. 在后续的一系列文章中，我打算用一种新的方法求解积分方程，同时研究这些解之间的相互关系和一般的性质特征. 在这篇文章中，我假设积分方程的核 $K(s,t)$ 是关于变量 s 和 t 的对称函数，这一假设对我的结果很重要.”

2.2 希尔伯特的特征值理论

特征值理论是数学中的一个重要理论，它主要包含的问题，如特征值、特征函数是否存在？特征值、特征函数具有什么性质？“任意”函数能否关于特征函数系展开？希尔伯特最早将特征值、特征函数的概念引入积分方程中，并对对称核的积分方程建立了特征值理论.

2.2.1 希尔伯特的代数问题

希尔伯特的《线性积分方程一般理论基础》一书第一章的标题为“线性积分方程理论”，共有五节，内容分别为

第一节：代数问题的解；
第二节：超越问题的解；
第三节：将二次型约简为平方和的变换问题对应的超越问题；
第四节：任意函数的特征函数展开式；
第五节：与二次型的极大极小的代数问题相类似的变分问题.

希尔伯特研究的积分方程为

$$\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=f(s) \tag{2.2}$$

其中，$f(s)$、$K(s,t)$ 为已知的连续函数且 $K(s,t)=K(t,s)$，$\varphi(s)$ 为未知函数，λ 为参数. 希尔伯特称积分方程(2.2)为第二型积分方程，他对积分方程第一型和第二型的分类方法沿用至今.

希尔伯特建立特征值理论的思路是先在有限维情形下建立一个代数问题，再将这个代数问题中得到的结果极限过渡到对称核积分方程上. 对此，他说道：

“我在这里所用的方法是：从一个代数问题(将n个变量的二次型转化为平方和的正交变换问题)出发，极限过渡到$n=\infty$的形式来得到超越问题的解，这一方法的基本思想已经在我的研讨班和1900—1901年的课程中讲过. 这些思想被有些人当成具有启发性的应急方法，如瑞利勋爵(Lord Rayleigh，1842—1919). 我现在已经将它发展为一个严格的原理.”

希尔伯特在第一章先将积分区间$[a,b]$ n等分，再用黎曼和代替黎曼积分，写出这样一个线性方程组

$$f_p=\varphi_p-l\sum_{q=1}^{n}K_{pq}\varphi_q,\qquad p=1,2,\cdots,n \tag{2.3}$$

其中，$K_{pq}=K\left(\frac{p}{n},\frac{q}{n}\right)$，$f_p=f\left(\frac{p}{n}\right)$，$\varphi_p=\varphi\left(\frac{q}{n}\right)$. 沃尔泰拉和弗雷德霍姆在求解积分方程时，也将积分方程转化为线性方程组进行处理，但是他们没有清楚地写出这样一个线性方程组. 为了从线性方程组(2.3)中确定出未知数$\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_n$，希尔伯特先定义了下面两个行列式

$$d(l)=\begin{vmatrix}1-lK_{11} & -lK_{12} & \cdots & -lK_{1n}\\ -lK_{21} & 1-lK_{22} & \cdots & -lK_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -lK_{n1} & -lK_{n2} & \cdots & 1-lK_{nn}\end{vmatrix}$$

和

$$D(l;x,y)=\begin{vmatrix}0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ y_1 & 1-lK_{11} & -lK_{12} & \cdots & -lK_{1n}\\ y_2 & -lK_{21} & 1-lK_{22} & \cdots & -lK_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_n & -lK_{n1} & -lK_{n2} & \cdots & 1-lK_{nn}\end{vmatrix}$$

他引入了缩写符号

$$Kxy=\sum_{p,q=1}^{n}K_{pq}x_py_q$$

$$Kx_i = K_{i1}x_1 + \cdots + K_{in}x_n, \qquad i = 1, 2, \cdots, n$$

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

从而有

$$Kxy = (Kx, y) = (x, Ky)$$

假设用

$$Ky_p = K_{p1}y_1 + \cdots + K_{pn}y_n$$

代替行列式 $D(l; x, y)$ 中的 y_p，将得到的新行列式记为 $D(l; x, Ky)$，通过计算可以得到关于 x, y 和 l 的恒等式

$$d(l)(x, y) + D(l; x, y) - lD(l; x, Ky) = 0 \tag{2.4}$$

随后，希尔伯特分 $d(l) \neq 0$ 和 $d(l) = 0$ 两种情况，来考虑线性方程组(2.3)的解. 他指出确定线性方程组(2.3)中的未知数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$，其实就是找到满足方程

$$(f, y) = (\varphi, y) - l(K\varphi, y)$$

的一个线性形式

$$(\varphi, y) = \varphi_1 y_1 + \cdots + \varphi_n y_n$$

当 $d(l) \neq 0$ 时，由式(2.4)可知

$$(\varphi, y) = -\frac{D(l; x, y)}{d(l)}$$

因此，线性形式 (φ, y) 的系数为未知数 $\varphi_1, \varphi_2, \cdots, \varphi_n$ 的值.

当 $d(l) = 0$ 时，希尔伯特将 $d(l) = 0$ 的根记为 l_i（$i = 1, 2, \cdots, n$），它们均为实数，且假设它们两两不相等. 用 $d_{11}(l), d_{22}(l), \cdots, d_{nn}(l)$ 表示 $d(l)$ 关于它的对角线上 n 个元素的较小值，即 $1 - lK_{pp}$ 的代数余子式，$d'(l)$ 表示 $d(l)$ 的导数，则有

$$d_{11}(l) + d_{22}(l) + \cdots + d_{nn}(l) = nd(l) - ld'(l)$$

因此，当 $l = l_h$ 时，

$$d_{11}(l_h)+d_{22}(l_h)+\cdots+d_{nn}(l_h)=-l_h d'(l_h) \tag{2.5}$$

因为假设 $d(l)$ 的根两两不相等，即它没有重根，所以 $d'(l_h)\neq 0$. 因此，等式左边的较小值 $d_{ii}(l)$（$l=1,2,\cdots,n$）不全为 0. 当 $l=l_h$ 时，考虑对应于式(2.3)的齐次线性方程组

$$\varphi_p - l_h\sum_{q=1}^{n}K_{pq}\varphi_q = 0,\qquad p=1,2,\cdots,n \tag{2.6}$$

由特征值的两两不相等，可以推出齐次方程组有非零解. 因此，希尔伯特用一种新的方法证明了存在对应于特征值 l_i 的特征向量 φ_i.

由恒等式(2.4)可知，表达式 $D(l_h;x,y)$ 中 $y_1,y_2,\cdots,y_n$ 的系数必须是齐次方程组(2.6)的解，而这个解与 x 无关，因此有

$$D(l_h;x,y)=(\psi_h,x)(\varphi_h,y)$$

右边第一个因子 (ψ_h,x) 是 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 的线性形式. 由 $D(l_h;x,y)$ 的对称性，x_p 的系数也是齐次方程组(2.6)的解，这样 $\psi_h=C\varphi_h$，即 $D(l_h;x,y)=C(\varphi_h,x)(\varphi_h,y)$，其中 C 是一个与 x 和 y 无关的常数. 如果 $C=\pm 1$，则

$$D(l_h;x,y)=\pm(\varphi_h,x)(\varphi_h,y) \tag{2.7}$$

由 $D(l;x,y)$ 的定义，可以看出 $x_p y_p$ 的系数为 $-d_{pp}(l)$. 比较式(2.7)两边 x_1y_1，$x_2y_2,\cdots,x_ny_n$ 的系数，可以得到

$$d_{11}(l_h)+d_{22}(l_h)+\cdots+d_{nn}(l_h)=\mp(\varphi_h,\varphi_h)$$

因此，由式(2.5)可知

$$(\varphi_h,\varphi_h)=\pm l_h d'(l_h),\qquad h=1,2,\cdots,n$$

从而由式(2.7)可知

$$\frac{D(l_h;x,y)}{l_h d'(l_h)}=\frac{(\varphi_h,x)(\varphi_h,y)}{(\varphi_h,\varphi_h)},\qquad h=1,2,\cdots,n$$

齐次线性方程组(2.6)可以写成下面关于 x 的恒等式

$$(\varphi_h,x)-l_h(\varphi_h,Kx)=0$$

当$k \neq h$时，有$l_k \neq l_h$，从而由上式可知

$$(\varphi_k, \varphi_h) \neq 0$$

即希尔伯特表明对应于不同特征值的特征向量是相互正交的.

由于$\dfrac{D(l;x,y)}{d(l)}$是一个有理函数，其分子为关于l的$n-1$次多项式，分母为关于l的n次多项式，根据有理函数的部分分解定理，有

$$\begin{aligned}\frac{D(l;x,y)}{d(l)} &= \frac{D(l_1;x,y)}{d'(l_1)}\frac{1}{l-l_1} + \frac{D(l_2;x,y)}{d'(l_2)}\frac{1}{l-l_2} + \cdots + \frac{D(l_n;x,y)}{d'(l_n)}\frac{1}{l-l_n} \\ &= \frac{(\varphi_1,x)(\varphi_1,y)}{(\varphi_1,\varphi_1)}\frac{l_1}{l-l_1} + \frac{(\varphi_2,x)(\varphi_2,y)}{(\varphi_2,\varphi_2)}\frac{l_2}{l-l_2} + \cdots + \frac{(\varphi_n,x)(\varphi_n,y)}{(\varphi_n,\varphi_n)}\frac{l_n}{l-l_n}\end{aligned}$$

当$l=0$时，$D(l;x,y) = -(x,y)$，$d(l)=1$. 从而有

$$\begin{aligned}(x,y) &= \frac{D(l_1;x,y)}{l_1 d'(l_1)} + \frac{D(l_2;x,y)}{l_2 d'(l_2)} + \cdots + \frac{D(l_n;x,y)}{l_n d'(l_n)} \\ &= \frac{(\varphi_1,x)(\varphi_1,y)}{(\varphi_1,\varphi_1)} + \frac{(\varphi_2,x)(\varphi_2,y)}{(\varphi_2,\varphi_2)} + \cdots + \frac{(\varphi_n,x)(\varphi_n,y)}{(\varphi_n,\varphi_n)}\end{aligned}$$

用Ky代替y可得到

$$\begin{aligned}Kxy = (x,Ky) &= \frac{D(l_1;x,y)}{l_1^2 d'(l_1)} + \frac{D(l_2;x,y)}{l_2^2 d'(l_2)} + \cdots + \frac{D(l_n;x,y)}{l_n^2 d'(l_n)} \\ &= \frac{1}{l_1}\frac{(\varphi_1,x)(\varphi_1,y)}{(\varphi_1,\varphi_1)} + \frac{1}{l_2}\frac{(\varphi_2,x)(\varphi_2,y)}{(\varphi_2,\varphi_2)} + \cdots + \frac{1}{l_n}\frac{(\varphi_n,x)(\varphi_n,y)}{(\varphi_n,\varphi_n)}\end{aligned} \tag{2.8}$$

当$x=y$时，有

$$(x,x) = \frac{(\varphi_1,x)^2}{(\varphi_1,\varphi_1)} + \frac{(\varphi_2,x)^2}{(\varphi_2,\varphi_2)} + \cdots + \frac{(\varphi_n,x)^2}{(\varphi_n,\varphi_n)}$$

$$Kxx = (x,Kx) = \frac{1}{l_1}\frac{(\varphi_1,x)^2}{(\varphi_1,\varphi_1)} + \frac{1}{l_2}\frac{(\varphi_2,x)^2}{(\varphi_2,\varphi_2)} + \cdots + \frac{1}{l_n}\frac{(\varphi_n,x)^2}{(\varphi_n,\varphi_n)}$$

在《线性积分方程一般理论基础》第一章的最后，希尔伯特通过大量计算得到的这些重要结果，其实就是将对称双线性形式约简至其轴上的主轴定理.

虽然使用的方法新颖独特，但是这些结果在线性代数中已经是已知的，而这些结果的重要性在于它们是希尔伯特进一步工作的出发点.

2.2.2　定义特征值、特征函数

希尔伯特在《线性积分方程一般理论基础》一书中的第一章第二节开头写道：

"假设 $K(s,t)$ 是 $[0,1]$ 上关于变量 s 和 t 的连续对称函数. 我们的方法是将代数问题严格地过渡到 $n=\infty$ 的极限形式上. 求解第二型积分方程 (2.2) 的超越问题，类似于第一章求解的代数问题. 在这一章运用我们的方法，会得到求解积分方程所需要的公式，这些公式最早是由弗雷德霍姆给出的."

希尔伯特将线性方程组 (2.3) 的系数行列式 $d(l)$ 扩展成关于 l 的幂级数

$$d(l)=1-d_1 l+d_2 l^2-\cdots\pm d_n l^n$$

其中，$d_h=\sum\limits_{p_1,p_2,\cdots,p_h}\begin{vmatrix} K_{p_1p_1} & K_{p_1p_2} & \cdots & K_{p_1p_h} \\ K_{p_2p_1} & K_{p_2p_2} & \cdots & K_{p_2p_h} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ K_{p_hp_1} & K_{p_hp_2} & \cdots & K_{p_hp_h} \end{vmatrix}$. 取 $\delta_h=\lim\limits_{n\to 0}\dfrac{d_h}{n^h}$，得

$$\delta_h=\frac{1}{h!}\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix} K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \cdots & K(s_1,s_h) \\ ... & \cdots & \cdots & \cdots \\ K(s_h,s_1) & K(s_h,s_2) & \cdots & K(s_h,s_h) \end{vmatrix}\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_h \tag{2.9}$$

接着引入幂级数

$$\delta(\lambda)=1-\delta_1\lambda+\delta_2\lambda^2-\delta_3\lambda^3\cdots$$

他指出幂级数 $\delta(\lambda)$ 最早是由弗雷德霍姆给出的. 由式 (2.9) 可知

$$|\delta_h|\leqslant\left(\frac{eK}{\sqrt{h}}\right)^h$$

因而，$\delta(\lambda)$ 是处处收敛的. 希尔伯特用一个引理表明 $d(l)$ 和 $\delta(\lambda)$ 之间存在的关系，即

$$\lim_{n\to\infty} d\left(\frac{\lambda}{n}\right)=\delta(\lambda)$$

和

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}d'\left(\frac{\lambda}{n}\right)=\delta'(\lambda)$$

在其书中第二章的后半部分，希尔伯特致力于积分方程(2.2)的求解. 他先将 $D(l;x,y)$ 过渡到极限 $n=\infty$ 的情形. 任取 $[0,1]$ 上关于变量 s 的两个函数 $x(s)$ 和 $y(s)$，将 $x_p=x\left(\frac{p}{n}\right)$ 和 $y_p=y\left(\frac{p}{n}\right)$ 代入行列式 $D(l;x,y)$ 中，从而将行列式展开成关于 l 的幂级数

$$D(l;x,y)=D_1(x,y)-D_2(x,y)l+D_3(x,y)l^2-\cdots\pm D_n(x,y)l^{n-1}$$

其中，$D_n(x,y)=\begin{vmatrix}0 & x_1 & x_2 & \cdots & x_n\\ y_1 & K_{11} & K_{12} & \cdots & K_{1n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y_n & K_{n1} & K_{n2} & \cdots & K_{nn}\end{vmatrix}$. 固定 h，可得

$$\lim_{n\to 0}\frac{D_h(x,y)}{n^h}=\Delta_h(x,y)$$

其中，$\Delta_h(x,y)=\dfrac{1}{h!}\int_0^1\cdots\int_0^1\begin{vmatrix}0 & x(s_1) & x(s_2) & \cdots & x(s_h)\\ y(s_1) & K(s_1,s_1) & K(s_1,s_2) & \cdots & K(s_1,s_h)\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ y(s_h) & K(s_h,s_1) & K(s_h,s_2) & \cdots & K(s_h,s_h)\end{vmatrix}\mathrm{d}s_1\cdots\mathrm{d}s_h$. 接着再引入 λ 的幂级数

$$\Delta(\lambda;x,y)=\Delta_1(x,y)-\Delta_2(x,y)\lambda+\Delta_3(x,y)\lambda^2-\cdots$$

希尔伯特得到

$$\lim_{n\to 0}\frac{1}{n}D\left(\frac{\lambda}{n};x,y\right)=\Delta(\lambda;x,y)$$

再将 $D(l;x,Ky)$ 过渡到极限 $n=\infty$ 的情形. 因为

$$Ky_p = K\left(\frac{p}{n},\frac{1}{n}\right)y\left(\frac{1}{n}\right)+K\left(\frac{p}{n},\frac{2}{n}\right)y\left(\frac{2}{n}\right)+\cdots+K\left(\frac{p}{n},\frac{n}{n}\right)y\left(\frac{n}{n}\right)$$

运用与前面相同的方法，希尔伯特得到下面的公式

$$\begin{aligned}\lim_{n\to 0}\frac{\lambda}{n^2}D\left(\frac{\lambda}{n};x,Ky\right)&=\lim_{n\to 0}\frac{\lambda}{n}D\left(\frac{\lambda}{n};x,\frac{1}{n}Ky\right)\\&=\lambda\left\{\Delta(\lambda;x,\overline{y})\right\}_{\overline{y}(s)=\int_0^1 K(s,t)y(t)\mathrm{d}t}\\&=\lambda\int_0^1\left\{\Delta(\lambda;x,\overline{y})\right\}_{\overline{y}(s)=K(s,t)}y(t)\mathrm{d}t\end{aligned}$$

令$l=\dfrac{\lambda}{n}$，对式(2.4)两边同时乘以$\dfrac{1}{n}$，可以得到

$$\frac{1}{n}d\left(\frac{\lambda}{n}\right)(x,y)+\frac{1}{n}D\left(\frac{\lambda}{n};x,y\right)-\frac{\lambda}{n^2}D\left(\frac{\lambda}{n};x,Ky\right)=0 \tag{2.10}$$

当$n\to\infty$时，有

$$\delta(\lambda)\int_0^1 x(s)y(s)\mathrm{d}s+\Delta(\lambda;x,y)-\lambda\int_0^1\left\{\Delta(\lambda;x,\overline{y})\right\}_{\overline{y}(s)=K(s,t)}y(t)\mathrm{d}t=0$$

令式(2.10)中$x(r)=K(s,r)$，$y(r)=K(r,t)$，并引入缩略符号

$$\Delta(\lambda;s,t)=\lambda\left\{\Delta(\lambda;x,y)\right\}_{\substack{x(r)=K(r,s)\\ y(r)=K(r,t)}}-\delta(\lambda)K(s,t)$$

式(2.10)可以化简为

$$\delta(\lambda)K(s,t)+\Delta(\lambda;s,t)-\lambda\int_0^1\Delta(\lambda;s,r)K(r,t)\mathrm{d}r=0 \tag{2.11}$$

再取

$$\overline{K}(s,t)=\frac{\Delta(\lambda;s,t)}{\delta(\lambda)}$$

希尔伯特称它为核$K(s,t)$的预解核，可以得到

$$K(s,t)=\overline{K}(s,t)-\lambda\int_0^1\overline{K}(s,r)K(r,t)\mathrm{d}r$$

从而可知积分方程(2.1)可解，且其解为

$$\varphi(s)=f(s)+\lambda\int_a^b \overline{K}(s,t)f(t)\mathrm{d}t$$

当$\delta(\lambda)\neq 0$时，第二型积分方程的解是唯一的. 希尔伯特在这里实现了从有限维的线性方程组到线性积分方程之间的严格的极限过程.

希尔伯特在《线性积分方程一般理论基础》一书中的第一章第三节对对称核积分方程引入了特征值和特征函数的概念. 在第三节开头，他写道：

“我们最主要的任务是把第一章中有关二次型 Kxx 的正交变换的代数问题，过渡到$n=\infty$的极限形式，进而转化到超越问题.”

希尔伯特在其书中的第 14 页，称$\delta(\lambda)=0$的零点为对称核$K(s,t)$的特征值，将其记为$\lambda_1,\lambda_2,\cdots$. 他研究了$\delta(\lambda)=0$的零点的性质，并用两个引理表明$\delta(\lambda)=0$的零点都是实数且$\lim\limits_{n\to\infty} nl_i=\lambda_i$，这里$l_i$和$\lambda_i$按绝对值增大的顺序排列，若绝对值相等则正数排在前面. 因此，希尔伯特得出对称核积分方程的特征值都是实数，这是对称核积分方程的一个重要性质.

在其书中的第 16 页，借助弗雷德霍姆行列式，希尔伯特为对称核积分方程定义了对应于特征值λ_k的特征函数$\varphi_k(s)$，其形式比较复杂. 不过，他指出这样定义的特征函数满足关系式

$$\int_0^1 \varphi_h(s)\varphi_k(s)\,\mathrm{d}s=0,\qquad h\neq k \tag{2.12}$$

和

$$\varphi_k(s)=\lambda_k\int_a^b K(s,t)\,\varphi_k(t)\mathrm{d}t$$

关系式(2.12)表明，对应于不同特征值的特征函数是相互正交的，这是对称核积分方程的另一个重要性质.

2.2.3 建立广义主轴定理

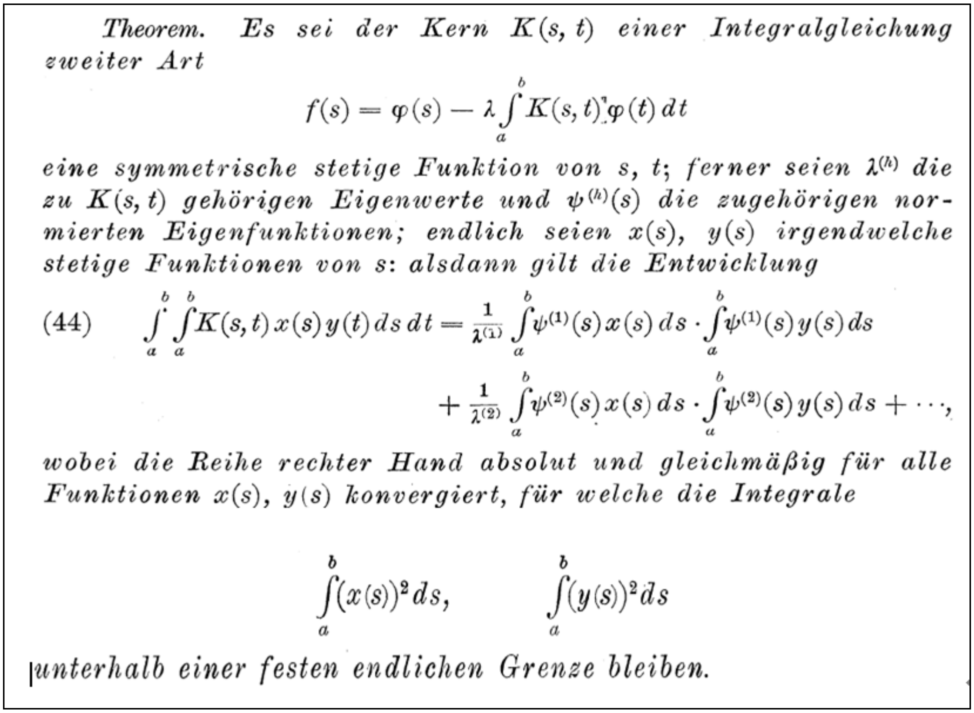
希尔伯特在其书中第一章第三节的后半部分，利用对称双线性形式与对称核的双重积分之间的关系，将第一节中建立的主轴定理极限过渡，建立了下面的广义主轴定理(见图 2.3)：

设$\varphi_n(s)$是对应于对称核$K(s,t)$的特征值λ_n的标准化的特征函数，则对任意

的连续函数 $x(s)$ 和 $y(s)$，有

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)y(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\sum_n\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b x(s)\,\varphi_n(s)\mathrm{d}s\int_a^b y(s)\varphi_n(s)\mathrm{d}s$$

成立，当 $\int_a^b x^2(s)\,\mathrm{d}s<\infty$ 和 $\int_a^b y^2(s)\,\mathrm{d}s<\infty$ 时，上式右边的级数绝对且一致收敛.



Theorem. Es sei der Kern $K(s,t)$ einer Integralgleichung zweiter Art

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,dt$$

eine symmetrische stetige Funktion von s, t; ferner seien $\lambda^{(h)}$ die zu $K(s,t)$ gehörigen Eigenwerte und $\psi^{(h)}(s)$ die zugehörigen normierten Eigenfunktionen; endlich seien $x(s)$, $y(s)$ irgendwelche stetige Funktionen von s: alsdann gilt die Entwicklung

$$(44)\qquad \int_a^b\int_a^b K(s,t)\,x(s)\,y(t)\,ds\,dt=\frac{1}{\lambda^{(1)}}\int_a^b\psi^{(1)}(s)\,x(s)\,ds\cdot\int_a^b\psi^{(1)}(s)\,y(s)\,ds$$
$$+\frac{1}{\lambda^{(2)}}\int_a^b\psi^{(2)}(s)\,x(s)\,ds\cdot\int_a^b\psi^{(2)}(s)\,y(s)\,ds+\cdots,$$

wobei die Reihe rechter Hand absolut und gleichmäßig für alle Funktionen $x(s)$, $y(s)$ konvergiert, für welche die Integrale

$$\int_a^b(x(s))^2\,ds,\qquad \int_a^b(y(s))^2\,ds$$

unterhalb einer festen endlichen Grenze bleiben.

图 2.3　希尔伯特的广义主轴定理[①]

证明　由第一节可得等式

$$(x,x)=\frac{D(l_1;x,x)}{l_1d'(l_1)}+\frac{D(l_2;x,x)}{l_2d'(l_2)}+\cdots+\frac{D(l_n;x,x)}{l_nd'(l_n)}$$

和

$$\frac{D(l_h;x,x)}{l_hd'(l_h)}=\frac{(\varphi_h,x)^2}{(\varphi_h,\varphi_h)},\qquad h=1,2,\cdots,n \tag{2.13}$$

① 摘自希尔伯特《线性积分方程一般理论基础》一书的第 19～20 页.

式(2.13)表明表达式(x,x)的右边和式中的每一项都是正的，这样当m为小于n的任意整数时，有

$$\frac{D(l_{m+1};x,x)}{l_{m+1}d'(l_{m+1})}+\frac{D(l_{m+2};x,x)}{l_{m+2}d'(l_{m+2})}+\cdots+\frac{D(l_n;x,x)}{l_n d'(l_n)}\leqslant(x,x) \tag{2.14}$$

又因为

$$\left|(\varphi_h,x)(\varphi_h,y)\right|\leqslant\frac{1}{2}\left[(\varphi_h,x)^2+(\varphi_h,y)^2\right]$$

所以

$$\left|\frac{D(l_h;x,y)}{l_h d'(l_h)}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left(\frac{D(l_h;x,x)}{l_h d'(l_h)}+\frac{D(l_h;y,y)}{l_h d'(l_h)}\right)$$

由式(2.14)可知

$$\left|\frac{D(l_{m+1};x,y)}{l_{m+1}d'(l_{m+1})}\right|+\left|\frac{D(l_{m+2};x,y)}{l_{m+2}d'(l_{m+2})}\right|+\cdots+\left|\frac{D(l_n;x,y)}{l_n d'(l_n)}\right|\leqslant\frac{1}{2}\left[(x,x)+(y,y)\right]$$

又有式(2.8)右边的最后$n-m$项和式的绝对值不超过

$$\frac{1}{2\left|l_{m+1}\right|}\left[(x,x)+(y,y)\right]$$

因此，由式(2.8)可得

$$\left|Kxy-\frac{D(l_1;x,y)}{l_1^2 d'(l_1)}-\frac{D(l_2;x,y)}{l_2^2 d'(l_2)}-\cdots-\frac{D(l_n;x,y)}{l_n^2 d'(l_n)}\right|\leqslant\frac{1}{2\left|l_{m+1}\right|}\left[(x,x)+(y,y)\right]$$

对这个不等式两边同时乘以$\frac{1}{n^2}$，再令$l_h=\frac{\lambda_h}{n}$，取极限有

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}Kxy=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{p,q=1}^{n}K_{pq}x_p y_q=\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)\,y(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{l_i}\cdot\frac{(\varphi_i,x)(\varphi_i,y)}{(\varphi_i,\varphi_i)}=\int_a^b x(s)\,\varphi_i(s)\mathrm{d}s\int_a^b y(s)\,\varphi_i(s)\mathrm{d}s$$

这样就证明了广义主轴定理.

希尔伯特的学生外尔(Hermann Weyl，1885—1955)在他的“大卫·希尔伯特及其数学工作”一文中，对希尔伯特的广义主轴定理有这样的描述：

“因此，具有任意对称核 K 的二重积分 $\int_0^1\int_0^1 K(s,t)x(s)y(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$ 的相应定理，对连续介质的振动理论提供了一般的基础. 其他人也许会看到这一点，但是希尔伯特至少比他们看得更清楚，而且他还竭尽全力地证明这些命题. 他通过运用 1730 年左右伯努利用于弦振动的同样的直接方法，即由代数问题取极限而成功证明. 在取极限的过程中，不得不用到科克-弗雷德霍姆行列式.”

希尔伯特在建立了广义主轴定理后还指出，如果用积分 $\int_0^1\int_0^1 K(r,t)y(r)\mathrm{d}r$ 代替定理中的 $y(t)$，由

$$\varphi_k(s)=\lambda_k\int_a^b K(s,t)\,\varphi_k(t)\mathrm{d}t$$

可以得到

$$\int_a^b\int_a^b KK(s,t)x(s)y(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\sum_n\frac{1}{(\lambda_n)^2}\int_a^b x(s)\varphi_n(s)\mathrm{d}s\int_a^b y(s)\varphi_n(s)\mathrm{d}s$$

简记为

$$KK(s,t)=\int_a^b\int_a^b K(s,r)K(t,r)\mathrm{d}r$$

希尔伯特称函数 $KK(s,t)$ 为 $K(s,t)$ 的叠核. 由广义主轴定理可知，$KK(s,t)$ 的特征值是 $K(s,t)$ 的特征值的平方，两者的特征函数相同.

希尔伯特在求解积分方程时，对积分方程的核引入了预解核. 他在其书第三章的最后部分，推广了有关预解核的公式，即式(2.11). 用 $\overline{K}(\lambda;s,t)$ 表示 $\overline{K}(s,t)$ 对参数 λ 的依赖性，令

$$F(s,t)=\overline{K}(\lambda;s,t)-\overline{K}(\mu;s,t)+(\mu-\lambda)\int_0^1\overline{K}(\lambda;s,r)K(\mu;r,t)\mathrm{d}r$$

重复运用式(2.11)可以得到恒等式

$$F(s,t)-\lambda\int_0^1 F(r,s)K(r,t)\mathrm{d}r=0$$

对不同于λ_h的λ值，$F(s,t)$等于零. 因此，$F(s,t)$关于λ,μ,s,t是恒等于零的，也即

$$\overline{K}(\lambda;s,t)-\overline{K}(\mu;s,t)=(\lambda-\mu)\int_0^1\overline{K}(\lambda;s,r)K(\mu;r,t)\mathrm{d}r$$

恒成立. 如果取$\overline{K}(\mu;s,t)$是第二型线性积分方程的核，则相应的预解核为$\overline{K}(\lambda+\mu;s,t)$，同时还可以得到

$$(\lambda_h-\mu)\int_0^1\varphi_h(t)\overline{K}(\mu;s,t)\mathrm{d}t=\varphi_h(s)$$

从而可以看出预解核$\overline{K}(\lambda+\mu;s,t)$的特征值为$\lambda_h-\mu$，相应的特征函数与$K(s,t)$的特征函数相同.

2.2.4 建立函数的展开定理

特征值和特征函数的存在性问题一直都是特征值理论中的重要问题. 希尔伯特在其书中第一章引言的第四段写道：

“对特征函数的存在性问题给出了一个新的且更完美的证明. 在位势理论边值问题的特殊情形中，众所周知，韦伯最早试图以狄利克雷–汤玛斯极小原理为基础，来证明特征函数的存在性问题. 后来庞加莱运用施瓦兹的方法证明了这一特殊问题. 在最一般的情形中，应用我的定理能证明特征函数的存在性，同时我的定理对无穷多个特征函数的存在性给出了一个充分必要条件. 我没有像他们(指韦伯、施瓦兹和庞加莱)那样先证明特征函数的存在性. 相反，我首先建立了一个一般的展开定理(指前面的广义主轴定理)，由此我可以很容易地得到特征值和特征函数存在的条件.”

此外，希尔伯特在其书中的第一章第四节的开头写道：

“第三节证明的定理(指前面的广义主轴定理)的第一个重要的应用，是回答特征值的存在性问题. 有趣的是，在线性微分方程理论中，证明出现在微分方程或边界条件中的参数的某些重要值的存在性非常困难. 而积分方程的特征值的存在性问题，通过运用我们的定理可以简单、完整地解决.”

紧接着他运用广义主轴定理证明了这样一个定理：

核 $K(s,t)$ 有 m 个特征值的充要条件是 $K(s,t)$ 可以展开为

$$K(s,t)=\frac{1}{\lambda_1}\varphi_1(s)\varphi_1(t)+\frac{1}{\lambda_2}\varphi_2(s)\varphi_2(t)+\cdots+\frac{1}{\lambda_m}\varphi_m(s)\varphi_m(t) \tag{2.15}$$

展开式(2.15)是在特征值存在的假设条件下建立的，所以希尔伯特如何用该展开式来表明特征值的存在则人们并不清楚. 后来，柯朗和希尔伯特在著名的《数学物理方法》一书中给出了特征值存在的清晰的证明.

希尔伯特在《线性积分方程一般理论基础》第一章第四节的后半部分主要致力于建立函数关于对称核的积分方程的特征函数的展开. 他指出每个形如

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)g(t)\mathrm{d}t$$

的函数能关于特征函数 $\varphi_n(s)$ 展成下面的级数

$$f(s)=\sum c_n\varphi_n(s) \tag{2.16}$$

其中，$c_n=\int_a^b f(s)\varphi_n(s)\mathrm{d}s$，右边级数绝对且一致收敛.

对于函数展开式的建立，希尔伯特指出：

“特征函数的结果可以作为三角函数、贝塞尔函数以及施图姆函数的展开式的特殊情形，还有多个变量的函数的展开式，这是庞加莱在位势理论边值问题的研究中首次建立的. 我的研究将表明，任意函数的展开式理论不仅能引入到常微分方程或偏微分方程上，而且积分方程也能被视为级数的展开式理论必要的基础和自然的出发点.”

希尔伯特的展式(2.16)后来发展成为积分方程和泛函分析中一个非常重要的定理，即希尔伯特-施密特展开定理，这也是希尔伯特最引以为豪的结果之一. 虽然希尔伯特自己对这个定理的建立非常满意，并一直称它是最重要的结果，但是与后来的一般理论相比，它几乎没有引起同时代人的关注. 对式(2.16)两边同时乘以 $f(s)$，再从 a 到 b 积分，希尔伯特得到了帕塞瓦尔等式

$$\int_a^b f^2(s)\,\mathrm{d}s=\sum_n\left(\int_a^b f(s)\varphi_n(s)\mathrm{d}s\right)^2$$

希尔伯特对积分方程的贡献不仅在于他引入了特征值和特征函数，建立了

特征值理论，最为重要的是他认识到正交函数系在函数空间理论中的重要意义.可以说，在傅里叶展开提出的 100 年后，希尔伯特才真正看到了傅里叶展开的几何学意义. 于是，他开始考虑对称核积分方程的特征函数系是不是可以构成一个完备的规范正交系，即能否将空间中的函数关于特征函数系来展开？希尔伯特得到的帕塞瓦尔等式与规范正交系的完备性是等价的. 因此，希尔伯特在建立特征值理论的工作中已经有了希尔伯特空间思想的萌芽.

希尔伯特在《线性积分方程一般理论基础》一书的第五章处理了一个与二次型的极大极小的代数问题相类似的超越问题. 这个问题在于寻找一个函数 $x(s)$，它使得重积分

$$J(x)=\int_a^b\int_a^b K(s,t)x(s)x(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

在条件

$$\int_a^b x^2(s)\mathrm{d}s=1$$

下存在一个极大值或极小值.

2.3 微分方程上的应用

1901—1902 年的冬季学期，希尔伯特在哥廷根讲授位势理论，并将他最初得到的一些结果应用到积分方程中. 由于他授课时的思想新颖超前，学生们有时都很难跟得上，即使是他的助手也不能完全听懂. 1904 年，希尔伯特发表了关于积分方程的第二篇文章“线性微分方程的应用”，也就是《线性积分方程一般理论基础》一书的第二章. 他在这里将对称核积分方程的特征值理论应用于常微分方程和偏微分方程中.

在第二篇文章的引言中，希尔伯特指出：

“在第一篇文章中我们已经建立了第二型积分方程的理论，得到了任意函数关于核的特征函数的展开的结果. 这在第一章的引言中已经提到了……在这篇文章中讨论积分方程理论在常微分方程和偏微分方程中的应用，这里会涉及皮卡的优美且重要的结果，它们与微分方程有关或联系紧密.”

希尔伯特的《线性积分方程一般理论基础》一书的第二章分为三节. 第一节讨论了二阶常微分方程，第二节讨论了自伴椭圆型二阶偏微分方程，第三节讨论了格林函数的存在性问题. 他对二阶常微分方程的讨论，其实是用积分方程的语言重新表述了施图姆-刘维尔理论. 他引入微分算子

$$L(u)=\frac{\mathrm{d}\left(p\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}\right)}{\mathrm{d}x}+qu=p\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+qu$$

其格林公式为

$$\int_a^b\left[vL(u)-uL(v)\right]\mathrm{d}x=\left[p\left(v\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-u\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\right)\right]_a^b$$

希尔伯特对微分方程 $L(u)=0$ 定义了基本解，即若函数 $\gamma(x,\xi)$ 关于变量 x 是二次连续可微函数，且对参数 ξ 的所有不同值，它是微分方程 $L(u)=0$ 的解，且有

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x}-\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}x}=-1$$

则称函数 $\gamma(x,\xi)$ 是微分方程 $L(u)=0$ 的基本解. 取 $u_1(x)$ 、$u_2(x)$ 是 $L(u)=0$ 的两个线性无关的特解，则基本解可以表示为

$$\gamma(x,\xi)=-\frac{1}{2}\frac{|x-\xi|}{x-\xi}\frac{u_2(\xi)u_1(x)-u_1(\xi)u_2(x)}{u_2(\xi)\frac{\mathrm{d}u_1(\xi)}{\mathrm{d}\xi}-u_1(\xi)\frac{\mathrm{d}u_2(\xi)}{\mathrm{d}\xi}}$$

因此，微分方程

$$\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}=0$$

$$x\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0$$

$$(x^2-1)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}x^2}+2x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}=0$$

的基本解分别为

$$\gamma(x,\xi)=-\frac{1}{2}\left|x-\xi\right|$$

$$\gamma(x,\xi)=-\frac{1}{2}\xi\left|lx-l\xi\right|$$

$$\gamma(x,\xi)=-\frac{1}{2}(1-\xi^2)\left|l\left(\frac{1+x}{1-x}\frac{1-\xi}{1+\xi}\right)\right|$$

希尔伯特指出一个微分方程会有无穷多个基本解，这些基本解可以由其中一个来得到. 随后，他指出这些基本解最重要的性质是在区间的边界点 $x=a$ 和 $x=b$ 处满足某些齐次边界条件. 他还列举了一些边界条件，并构造出 $L(u)$ 的格林函数为 $K(x,y)$ 且满足 $K(x,y)=K(y,x)$. 他在其书中的第 46 页用一个定理表明，如果微分表达式 $L(u)$ 的满足 5 个边值条件的格林函数是第一型积分方程

$$f(x)=\int_a^b G(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi \tag{2.17}$$

的核，其中 $f(x)$ 是二次连续可微函数，则积分方程有且仅有一个解 $\varphi(x)$，且可以通过公式

$$\varphi(x)=-L(f(x))$$

得到. 反之，如果 $\varphi(x)$ 是任意连续函数，微分方程

$$\varphi(x)+L(f(x))=0$$

的解 $f(x)$ 可以确定，且它满足 5 个边界条件，则这个解为式(2.17)且是唯一的. 他在其书中的第 49 页也给出微分方程

$$L(u)+\lambda u=0$$

的特征值、特征函数就是积分方程

$$f(x)=\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,\xi)\varphi(\xi)\mathrm{d}\xi$$

的特征值、特征函数(见图 2.4).

Satz 12. *Wenn die Greensche Funktion des Differentialausdruckes $L(u)$ für irgendein Paar der Randbedingungen I—V als Kern der Integralgleichung zweiter Art*

(5) $$f(x) = \varphi(x) - \lambda \int_a^b K(x, \xi)\varphi(\xi)\, d\xi$$

genommen wird, so erhält man die lösende Funktion $\mathsf{K}(x, \xi)$ dieser Integralgleichung, indem man die zu den nämlichen Randbedingungen gehörende Greensche Funktion des Differentialausdruckes

$$\Lambda(u) = L(u) + \lambda u$$

bildet.

Da nach Satz 11 die den Randbedingungen genügende Lösung der Differentialgleichung

(6) $$\Lambda(u) + \varphi(x) = 0$$

unmittelbar aus der Greenschen Funktion des Differentialausdruckes $\Lambda(u)$ gefunden wird, so erweisen sich also die Integration dieser Differentialgleichung (6) bei gegebenen Randbedingungen und die Lösung der Integralgleichung (5) zweiter Art als äquivalente Probleme.

图 2.4　微分方程与积分方程的特征值、特征函数的关系[①]

希尔伯特在《线性积分方程一般理论基础》一书中的第二章第二节引入了自伴椭圆型微分算子

$$L(u) = \frac{\partial\left(p\dfrac{\partial u}{\partial x}\right)}{\partial x} + \frac{\partial\left(p\dfrac{\partial u}{\partial y}\right)}{\partial x} + qu = p\Delta u + \frac{\partial p}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y}\frac{\partial u}{\partial y} + qu$$

他也对 $L(u)$ 构造了格林函数 $K(x,y;\xi,\eta)$ 且满足对称性. 根据格林函数的性质，由偏微分方程

$$\Delta(u) = L(u) + 2\pi\lambda u$$

可以得出

$$f(x,y) = \varphi(x,y) - \lambda\iint_G K(x,y;\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\mathrm{d}\xi\mathrm{d}\eta$$

因而偏微分方程的特征值问题完全等价于对称核积分方程的特征值问题. 由此可以看出，希尔伯特通过构造格林函数，将所要处理的微分方程转化为对称核积分方程. 对称核积分方程的对称核就是他所构造的格林函数，微分方程的边

① 摘自希尔伯特《线性积分方程一般理论基础》一书的第 49 页.

值条件融入积分方程的核中，从而他将要处理的微分方程的特征值问题转化为对称核积分方程的特征值问题，进而便可以将其在第一篇文章中建立的对称核积分方程的特征值理论应用于微分方程的处理上，这样微分方程的特征问题也就随即证明了. 因此，积分方程成为了求解微分方程的一种方法，而运用格林函数实现转化则成为了一个重要的手段. 在希尔伯特之后，这种研究方法被越来越多地用来解决物理问题. 希尔伯特指出在空气动力学这一物理领域，物理概念可以直接导向积分方程.

第 3 章　希尔伯特的一般理论

1906 年，希尔伯特发表了关于积分方程研究的第四篇文章. 他在文章中对无穷二次型建立了谱理论，引入了连续、有界、全连续、谱和谱分解等泛函分析中的重要概念，不过在表述上带有 19 世纪数学的深深印记. 在随后的第五篇文章中，希尔伯特将其谱理论应用到积分方程的处理上，从而发展了一种求解积分方程的新方法.

3.1　希尔伯特的目标

数学家的数学观也属于数学思想的范畴，这包括他们对数学的本质、特点、意义和价值的认识. 希尔伯特认为数学科学是一个有机的整体，它的生命力正是在于各个部分之间的联系，数学理论越是向前发展，它的结构就变得越发调和一致，并且这门学科一向相互隔绝的分支也会显露出原先意想不到的关系.

随着研究的不断深入，希尔伯特不仅认识到积分方程理论可以纳入无穷维线性方程组理论中作为特殊情形，而且他试图把分析学中的线性问题都统一到方程 $\lambda x - Tx = y$ 的理论上. 这样就可以运用代数的思想方法来处理分析学问题，使代数和分析在思想方法上具有统一框架，进而从方法论的角度达到处理分析学问题的统一途径.

由于他所设想研究的这一问题太过一般化，因而面临重重困难，他自己也说道：

“如果我们真不想让必须考虑的事情把自己弄得狼狈不堪，那就要像西格弗里德[①]一样战斗，大火都在他面前退缩了. 现在，困难正在召唤我们前进，它将一直引导我们去夺取最美好的奖赏：代数和分析在方法上的统一框架！”

那么，希尔伯特能否给分析学带来那种可以贯穿和支撑整个分析学发展所必需的灵活性和力量呢？

---

① 西格弗里德是德国古神话中的英雄.

有限多个变量的二次型理论是19世纪代数学家的研究课题. 当二次型的变量从有限多个增加到无穷多个时，问题就变得困难起来，因为这不是一个单纯的代数问题，必须得考虑收敛性. 对当时的代数学家来说，他们都很难解决由此产生的分析学问题. 对此，贝尔(Eric Temple Bell，1883—1960)说道：

“对一个能干的代数学家来说,他能很容易地设计出变量从2个和3个到任意有限多个时的推广，但是当个数进一步增加到无穷多个时，谁都无法轻而易举地解决由此而产生的分析学问题.”

作为一个领头数学家，希尔伯特对数学的发展方向具有超前的预见性. 此时，他尝试在这个完全陌生的数学领域上做出突破. 他的工作在开辟未知数学领域方面具有开创性意义. 希尔伯特 1906 年的第四篇文章收录在《线性积分方程一般理论基础》一书的第四章. 他在这本书第四章的引言中也写道：

“对无穷多个变量的二次型进行系统的研究本身就非常重要,这一研究也是对已经建立的有限多个变量的二次型理论的完善. 无穷多个变量的二次型理论不仅可以应用到积分方程,还可以建立斯蒂尔切斯美丽的连续分数理论的基础,甚至可以为希尔、庞加莱、科克等人曾经研究的无穷维线性方程组的求解问题建立基础.”

3.2 希尔伯特的谱理论

谱是特征值概念的推广，因为无穷这一属性使得产生了连续谱. 谱理论是泛函分析的重要分支之一. 有限维空间上的线性算子由它的特征值和最小多项式完全确定. 将这一结论推广到有界线性算子的情况，研究它的结构，就是算子的谱理论. 算子的“谱”类似于矩阵的特征值.

希尔伯特在其谱理论的工作中最伟大的成就，是他把谱分解理论由全连续二次型推广到有界二次型上. 他建立谱理论的方法类似于建立对称核积分方程的特征值理论的方法，即从有限多个变量的二次型主轴化理论出发，通过极限过渡的方法，建立了无穷二次型的谱理论.

3.2.1　有限维的情形

笛卡儿(René Descartes，1596—1650)和费马(Pierre de Fermat，1601—1665)将二次曲线和二次曲面的方程进行变形，选择主轴方向的轴作为坐标轴来简化方程的形式，进而创立了解析几何. 解析几何的出现标志着数学方法上的重大进步，用解析几何的方法能把几何问题转化为同一种形式，即可以处理的代数形式，从而为求解几何问题提供了一种普遍的方法. 解析几何的建立是数学思想上的一次飞跃，它代表着代数学与几何学的统一.

二次型主轴化的代数理论是将二次曲线方程和二次曲面方程化为标准形问题的自然推广. 1765 年，欧拉(Leonhard Euler，1707—1783)在他关于旋转支体的力学研究中引入“主轴”这个术语，之前他也研究过 2 个和 3 个变量的二次型的主轴约简问题. 1759 年，拉格朗日(Joseph Louis Lagrange，1736—1813)将二次型的约简的主轴定理从三维推广到了 n 维. 1829—1830 年，柯西(Augustin Louis Cauchy，1789—1867)指出对称二次型

$$K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{n}k_{pq}x_px_q$$

的标准形

$$K(x,x)=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2$$

中的系数 λ_i 一定是实数. 1851 年，西尔维斯特(James Joseph Sylvester，1814—1897)提出了惯性定律：

实系数二次型 $K(x,x)=\sum_{i,j=1}^{n}a_{ij}x_ix_j$，总能用具有行列式不为零的实线性变换

$$x_i=\sum_{j=1}^{n}b_{ij}y_j,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

化为 r 个平方项的和，不管用什么变换，正项个数 s 和负项个数 $r-s$ 总是不变的.

但是西尔维斯特没有给出证明. 二次型约简的研究会涉及二次型的特征方程和特征值的概念. 1852 年，西尔维斯特指出二次型的标准形的系数是特征多

项式的根，即特征值. 1868 年，魏尔斯特拉斯(Karl Weierstrass，1815—1897)完成了二次型理论，并推广到双线性型.

线性代数的大部分内容可以采用不同的语言和观点来表达，但它们彼此等价. 现在常用的矩阵出现得比较晚. 1850 年，为了与行列式区别开来，西尔维斯特首次引入“矩阵”这个术语. 1858 年，凯莱(Arthur Cayley，1821—1895)开创了矩阵演算，从而将二次型约简至其标准形与矩阵的对角化对应起来. 如果用矩阵语言表述二次型的主轴定理，则该定理表明，每个实对称矩阵可以通过某个正交变换将它转化为一个对角矩阵，其对角线上的元素是该矩阵的特征值. 于是在 19 世纪末的时候，有关二次型约简的主轴定理有两种表述，一是将二次型约简至其标准形；二是实对称矩阵的对角化.

希尔伯特仍然用极限过渡的方法对无穷二次型建立谱理论，即先对有限多个变量的二次型

$$K_n(x,x)=\sum_{p,q=1}^{n} k_{pq}x_p x_q$$

进行研究，再极限过渡到无穷多个变量的二次型

$$K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq}x_p x_q$$

上，后面将其简称为无穷二次型.

对 $x=\{x_n\}$ 和 $y=\{y_n\}$，希尔伯特定义

$$(x,x)=x_1^2+x_2^2+\cdots$$

$$(x,y)=x_1y_1+x_2y_2+\cdots$$

$$(x,x)_n=x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$$

$$(x,y)_n=x_1y_1+x_2y_2+\cdots+x_ny_n$$

根据弗罗贝尼乌斯(Ferdinand Georg Frobenius，1849—1917)双线性形式的“卷积”的概念，他对两个双线性形式 $A_n(x,y)=\sum_{p,q=1}^{n} a_{pq}x_p y_q$，$B_n(x,y)=\sum_{p,q=1}^{n} b_{pq}x_p y_q$

定义了乘积形式，即

$$A_n(x,\cdot)B_n(\cdot,y)=\sum_{p,q,r=1}^{n}a_{pq}b_{qr}x_py_r$$

这个定义可以推广到无穷多个变量的双线性形式

$$A(x,y)=\sum_{p,q=1}^{\infty}a_{pq}x_py_q$$

上，用 $A(B(x,y))$ 来表示 $A(x,\cdot)B(\cdot,y)$.

希尔伯特在有限维情形下考察了 $(x,x)_n-\lambda K_n(x,x)$，他定义了两个行列式

$$D_n(\lambda)=\begin{vmatrix}1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \cdots & -\lambda k_{1n}\\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \cdots & -\lambda k_{2n}\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \cdots & 1-\lambda k_{nn}\end{vmatrix}$$

和

$$D_n(\lambda;x,y)=\begin{vmatrix}1-\lambda k_{11} & -\lambda k_{12} & \cdots & -\lambda k_{1n} & x_1\\ -\lambda k_{21} & 1-\lambda k_{22} & \cdots & -\lambda k_{2n} & x_2\\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\\ -\lambda k_{n1} & -\lambda k_{n2} & \cdots & 1-\lambda k_{nn} & x_n\\ y_1 & y_2 & \cdots & y_n & 0\end{vmatrix}$$

取这两个行列式的商为

$$K_n(\lambda;x,y)=\frac{D_n(\lambda;x,y)}{D_n(\lambda)}$$

希尔伯特称 $K_n(\lambda;x,y)$ 为二次型 $K_n(x,x)$ 的预解式. 于是，他得到下面的恒等式

$$K_n(\lambda;x,y)-\lambda K_n(x,\cdot)K_n(\lambda;\cdot,y)=(x,y)$$

根据第一篇文章中建立特征值理论时得到的关于 $\dfrac{D(l;x,y)}{D(l)}$ 的展开式，他将预解式 $K_n(\lambda;x,y)$ 分解为

$$K_n(\lambda;x,y)=\frac{L_1^{(n)}(x)L_1^{(n)}(y)}{1-\dfrac{1}{\lambda_1^{(n)}}}+\cdots+\frac{L_n^{(n)}(x)L_n^{(n)}(y)}{1-\dfrac{1}{\lambda_n^{(n)}}}$$

其中，$L_i^{(n)}(x)$是线性形式(φ^i,x)，$\lambda_i^{(n)}$是$K_n(x,y)$的特征值，φ^i是标准化的特征向量. 当$\lambda=0$时，$D_n(\lambda;x,y)=-(x,y)_n$，$D_n(\lambda)=1$，所以

$$(x,y)_n=L_1^{(n)}(x)L_1^{(n)}(y)+\cdots+L_n^{(n)}(x)L_n^{(n)}(y)$$

用Ky替换y可以得到

$$(x,Ky)_n=K_n(x,y)=\frac{L_1^{(n)}(x)L_1^{(n)}(y)}{\lambda_1^{(n)}}+\cdots+\frac{L_n^{(n)}(x)L_n^{(n)}(y)}{\lambda_n^{(n)}}$$

特别地，当$x=y$时，有

$$K_n(x,x)=\frac{(L_1^{(n)}(x))^2}{\lambda_1^{(n)}}+\cdots+\frac{(L_n^{(n)}(x))^2}{\lambda_n^{(n)}} \tag{3.1}$$

和

$$(x,x)_n=(L_1^{(n)}(x))^2+\cdots+(L_n^{(n)}(x))^2$$

希尔伯特通过大量的计算，在有限维情形下建立的这些看起来比较复杂的公式，其实就是将二次型约简至其轴上的主轴定理. 这些在当时的线性代数中是已知的结果，同建立特征值理论时一样，它们是希尔伯特进一步工作的出发点. 接下来他通过极限过渡的方法，把预解式的概念和它的分解从有限维的$K_n(x,x)$过渡到无穷二次型$K(x,x)$上.

3.2.2 定义点谱、连续谱

特征值可能是一组可数无穷多的数列，也可能会出现“连续谱”，即谱中的点包含了一个区间上的所有值，而不是区间中一些离散的点. 在这种情形下函数关于特征函数的傅里叶展开也会变为傅里叶积分. 如傅里叶在其热传导的研究中，考察了方程

$$y''+\lambda y=0$$

其边界条件为

$$y(-a)=y(a)=0$$

该方程的特征值为 $\lambda_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)^2\pi^2/a^2$，它们将区间 $[0,+\infty)$ 分割为长度趋于零的一些小区间，这使得傅里叶得到定义在 R 上周期为 $2a$ 的任意函数 f 的三角函数展开式的“极限情形”为

$$f(x)=\frac{1}{\pi}-\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{d}t\int_0^{\infty}f(t)\cos u(x-t)\mathrm{d}u$$

其中“特征值”充满区间 $[0,+\infty)$，即每个大于 0 的实数都是方程的特征值.

1897 年，维尔丁格(Wilhelm Wirtinger，1865—1945)又发现了一个有连续谱的例子. 虽然希尔伯特没有提到维尔丁格的论文，但是很可能他看过这篇论文. 希尔伯特首先考虑在什么情况下 ∞ 不会成为 $K(x,x)$ 的谱的聚点，也就是说，$K_n(x,x)$ 的特征值在区间 J 内是一致有界的. 他先定义函数

$$X_p^{(n)}(\lambda)=\begin{cases}0, & \lambda\leqslant\lambda_p^{(n)} \\ (L_p^{(n)}(x))^2(\lambda-\lambda_p^{(n)}), & \lambda>\lambda_p^{(n)}\end{cases},\quad p=1,2,\cdots,n$$

和

$$X^{(n)}(\lambda)=\sum_{p=1}^{n}X_p^{(n)}(\lambda)$$

如果变量 $x=\{x_p\}$ 只有一个非零元素 x_i 且 $x_i=1$，或者 $x=\{x_p\}$ 有两个非零元素 x_i 和 x_j 且 $x_i=x_j=\frac{1}{\sqrt{2}}$，则希尔伯特称变量 $x=\{x_p\}$ 为正规变量. 因为所有正规变量构成的集合是一个可数集，所以可以将它们列举出来形成一个点列 $\{x^{(k)}\}$. 他也指出对所有的正规变量 $x=\{x_p\}$，函数列 $\{X^{(n)}(\lambda)\}$ 的子列 $\{X^{(m_j)}(\lambda)\}$ 关于 λ 是一致收敛的. 根据前面得到的公式

$$(x,x)_n=\sum_{i=1}^{n}x_i^2=(L_1^{(n)}(x))^2+\cdots+(L_n^{(n)}(x))^2$$

和 $X^{(i)}(\lambda)$ 的定义，可以得出每个 $X^{(n)}(\lambda)$ 是变量为 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ 的二次型. 固定

p 和 q ，$X^{(m_j)}(\lambda)$ 中 $x_p x_q$ 的系数使得 $X_{pq}^{(m_j)}(\lambda)$ 收敛于 λ 的一个连续函数，将其记为 $X_{pq}(\lambda)$. 现在定义一个双线性形式

$$X(\lambda)=\sum_{p,q=1}^{\infty} X_{pq}(\lambda) x_p x_q$$

这个定义最初只定义在变量 $\{x^{(k)}\}$ 的正规集合和包含 $K_n(x,x)$ 的特征值的区间 J 上，希尔伯特又将它扩展到所有变量 x 和所有实数 λ 上.

希尔伯特接下来用 $X(\lambda)_k$ 表示 $X(\lambda)$ 在正规变量 $x^{(k)}$ 处的值，然后证明了对所有的 k 和 λ ，$X(\lambda)_k$ 都具有关于 λ 的左导数 $\tau_k^-(\lambda)$ 和右导数 $\tau_k^+(\lambda)$ ，它们是 λ 的非减函数. 存在一个 k ，使得 $\tau_k^-(\lambda)\neq\tau_k^+(\lambda)$ 的所有 λ 的集合是一个可数集. 在《线性积分方程一般理论基础》一书中的第 119 页，希尔伯特称这些 λ 值为无穷二次型 $K(x,x)$ 的点谱或非连续谱，点谱中的元素是 $K(x,x)$ 的特征值.

希尔伯特也证明了系数 $X_{pq}(\lambda)$ 对每个 λ 都有左、右导数，而且除了 $K(x,x)$ 的点谱外它们都相等. 如果 λ 不是 $K(x,x)$ 的点谱，他构造了二次型

$$\tau(\lambda)=\sum_{p,q=1}^{\infty} \tau_{pq}(\lambda) x_p x_q$$

其中，$\tau_{pq}(\lambda)$ 是 $X_{pq}(\lambda)$ 的左、右导数的相同值. 对点谱中的一点 λ_h ，定义二次型

$$E_h(x,x)=E_h=\sum_{p,q=1}^{\infty}(\tau_{pq}^+(\lambda_h)-\tau_{pq}^-(\lambda_h)) x_p x_q$$

其中，$\tau_{pq}^{\pm}(\lambda_h)$ 是 $X_{pq}(\lambda)$ 在 λ_h 处的左、右导数且假设它们不相等，这些二次型满足关系式

$$\sum_p E_p \leqslant (x,x)$$

他定义了下面两个式子

$$\varepsilon(\lambda)=\sum_{\lambda_p<\lambda} E_p(x,x)$$

和

$$\eta(\lambda)=\sum_{\lambda_p<\lambda}(\lambda-\lambda_p)E_p(x,x)$$

其中，$\eta(\lambda)$ 在每个点处也有左、右导数，且除了 $K(x,x)$ 的点谱中的点，它们都是相等的. 接着他指出

$$\alpha(\lambda)=X(\lambda)-\eta(\lambda)$$

是关于 λ 的连续可微函数，而且

$$\sigma(\lambda)=\sum_{p,q=1}^{\infty}\sigma_{pq}(\lambda)x_px_q=\frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\lambda}=\tau(\lambda)-\varepsilon(\lambda)$$

如果实数 λ 的每个邻域内都有 λ'，使得对所有 x，都有 $\sigma(\lambda)\neq\sigma(\lambda')$，则希尔伯特称所有这样的 λ 构成的集合为 $K(x,x)$ 的连续谱. 点谱和连续谱合起来称为 $K(x,x)$ 的谱. 除了 $K(x,x)$ 的谱的聚点，X 的系数是线性的而且 $\varepsilon(\lambda)$ 的系数是常数. 因此从 ∞ 不是 $K(x,x)$ 的谱的聚点的假设中，可以得出 $K(x,x)$ 的连续谱包含在一个区间 S 中.

希尔伯特在《线性积分方程一般理论基础》一书的第四章第一节中指出：

“我们的第一个重要任务是将 K_n 的预解式的概念极限过渡到 K 上，对 K 也建立类似于部分分解式(3.1)的表达式.”

受到斯蒂尔切斯(Thomas Joannes Stieltjes，1856—1894) 1894 年关于连续分数的论文的启发和影响，希尔伯特通过一些构造和计算得出 $K(x,x)$ 的预解式 $K(\lambda;x,x)$ 的表达式为

$$K(\lambda;x,x)=\sum_p E_p(x,x)\left(1-\frac{\lambda}{\lambda_p}\right)^{-1}+\int_S\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)^{-1}\mathrm{d}\sigma(\mu)$$

特别地，

$$(x,x)=\sum_p E_p(x,x)+\int_S\mathrm{d}\sigma(\lambda)$$

其中和式是在点谱上进行的，积分是在连续谱上进行的.

3.2.3 有界无穷二次型的谱分解

在线性代数中可以利用正交变换

$$x_p=\sum_{q=1}^{n}l_{qp}y_q=L_p(y),\qquad p=1,2,\cdots,n$$

把二次型

$$K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{n}k_{pq}x_px_q$$

化为平方和

$$K(x,x)=\sum_{p=1}^{n}a_py_p^2$$

的形式.

为了改善相关的结果，希尔伯特在《线性积分方程一般理论基础》一书中的第 125 页，对双线性形式引入了有界的概念. 如果对所有满足 $(x,x)\leqslant 1$ 和 $(y,y)\leqslant 1$ 的 $x=\{x_n\}$ 和 $y=\{y_n\}$，都有 $|K(x,y)|\leqslant M$，则称双线性形式 $K(x,y)$ 是有界的，M 称为 $K(x,y)$ 的界. 他指出有界双线性形式对应的无穷二次型也是有界的，他还给出了一个有界无穷二次型的例子，即

$$K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{\infty}\frac{x_px_q}{p+q}$$

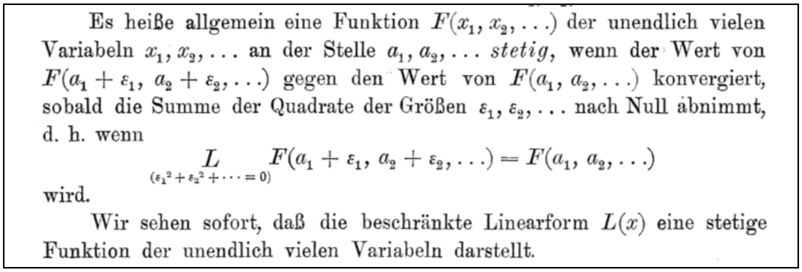
显然，有界的定义也可以推广到线性形式 $L(x)=\sum_{p=1}^{\infty}l_px_p$ 上，即如果系数的平方和 $\sum_{p=1}^{\infty}l_p^2<\infty$，则称线性形式 $L(x)$ 有界.

希尔伯特对无穷多个变量的函数引入了连续的概念(见图 3.1). 如果一个具有无穷多个变量的函数 $F(x_1,x_2,\cdots)$ 满足

$$\lim_{\varepsilon_1^2+\varepsilon_2^2+\cdots\to 0}F(a_1+\varepsilon_1,a_2+\varepsilon_2,\cdots)=F(a_1,a_2,\cdots)$$

则称函数 $F(x_1,x_2,\cdots)$ 在点 $a=(a_1,a_2,\cdots)$ 处是连续的. 希尔伯特引入的有界和连

续的概念，后来成为泛函分析中的重要概念. 由连续的定义，可以得出有界线性形式 $L(x)$ 是连续的，而且他指出有界无穷二次型都是连续的. 如果用算子语言表述，希尔伯特已经得出有界线性算子是连续的.



Es heiße allgemein eine Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ an der Stelle $a_1, a_2, \ldots$ *stetig*, wenn der Wert von $F(a_1+\varepsilon_1,\ a_2+\varepsilon_2, \ldots)$ gegen den Wert von $F(a_1, a_2, \ldots)$ konvergiert, sobald die Summe der Quadrate der Größen $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ nach Null abnimmt, d. h. wenn

$$\underset{(\varepsilon_1{}^2+\varepsilon_2{}^2+\cdots=0)}{L} F(a_1+\varepsilon_1,\ a_2+\varepsilon_2, \ldots) = F(a_1, a_2, \ldots)$$

wird.

Wir sehen sofort, daß die beschränkte Linearform $L(x)$ eine stetige Funktion der unendlich vielen Variabeln darstellt.

图 3.1　希尔伯特引入的连续概念①

主轴定理表明有限多个变量的二次型可以通过正交变换化简为其标准形. 那么，无穷二次型是否也可以通过正交变换化简为其标准形呢？希尔伯特首先将正交变换的概念推广到无穷维的情形，他考虑满足条件

$$\sum_{r=1}^{\infty} o_{pr} o_{qr} = \delta_{pq}, \qquad \sum_{r=1}^{\infty} o_{rp} o_{rq} = \delta_{pq}, \quad p,q = 1,2,\cdots$$

的无穷矩阵 $O=(o_{pq})$ 对应的变换

$$x_j = \sum_{r=1}^{\infty} o_{jr} x_r'$$

和

$$x_j' = \sum_{r=1}^{\infty} o_{rj} x_r$$

他称该变换为正交变换.

希尔伯特对有界无穷二次型建立了谱分解定理(见图 3.2)：

每个有界无穷二次型 $K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{\infty} k_{pq} x_p x_q$，都可以通过唯一的正交变换转化，

① 摘自希尔伯特《线性积分方程一般理论基础》一书的第 127 页.

$$K(x,x)=\sum_{i=1}^{\infty}k_i x_i^2+\int_{(S)}\frac{\mathrm{d}\sigma(\mu,\zeta)}{\mu}$$

其中，k_i是K的特征值的倒数，这个积分是在连续谱上进行的.

Wir fassen die gewonnenen Resultate wie folgt zusammen:

Satz 33. *Jede beschränkte quadratische Form K unendlich vieler Variablen läßt sich stets und nur auf eine Weise durch eine orthogonale Substitution in die Gestalt bringen*

$$K = k_1 x_1^2 + k_2 x_2^2 + \cdots + \int_{(s)} \frac{d\sigma(\mu;\xi)}{\mu},$$

图 3.2 希尔伯特对有界无穷二次型建立的谱分解定理①

算子的谱半径是与算子密切相关的一个量，用它可以估计谱集的范围，可以刻画算子. 希尔伯特指出有界无穷二次型$K(x,x)$的谱$\{\lambda_n\}$，满足$|\lambda_n|\leqslant\dfrac{1}{M}$，其中$M$是$K(x,x)$的最小的界.

3.2.4 全连续概念的引入

为了消除连续谱，希尔伯特对无穷多个变量的函数引入全连续的概念（见图 3.3）. 如果一个具有无穷多个变量的函数$F(x_1,x_2,\cdots)$满足

$$\lim_{\varepsilon_1\to 0,\varepsilon_2\to 0,\cdots}F(a_1+\varepsilon_1,a_2+\varepsilon_2,\cdots)=F(a_1,a_2,\cdots)$$

其中，$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots$可以取遍使得

$$\lim_{h\to\infty}\varepsilon_1{}^{(h)}=0,\lim_{h\to\infty}\varepsilon_2{}^{(h)}=0,\cdots$$

成立的任何数组$\varepsilon_1{}^{(h)},\varepsilon_2{}^{(h)},\cdots$，则称函数$F(x_1,x_2,\cdots)$在点$a=(a_1,a_2,\cdots)$处是全连续的.

希尔伯特证明了无穷二次型$K(x,x)$是全连续的几个充分条件，其中最重要的一个充分条件是二次型$K(x,x)$的系数，满足$\sum\limits_{p,q=1}^{\infty}k_{pq}^2<\infty$，即二次型的系数是平方可和序列. 这个充分条件是他在随后第五篇文章中能运用谱理论来处理积分方程

① 摘自希尔伯特《线性积分方程一般理论基础》一书的第 145 页.

的关键. 他也指出全连续的无穷二次型 $K(x,x)$ 满足 $\lim\limits_{n\to\infty} K_n(x,x)=K(x,x)$，其中 $K_n(x,x)$ 是 $K(x,x)$ 的 n 部分.

Wir nennen eine Funktion $F(x_1, x_2, \ldots)$ der unendlich vielen Variabeln $x_1, x_2, \ldots$ für ein bestimmtes Wertsystem derselben *vollstetig*, wenn die Werte von $F(x_1+\varepsilon_1,\ x_2+\varepsilon_2, \ldots)$ gegen den Wert $F(x_1, x_2, \ldots)$ konvergieren, wie man auch immer $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ für sich zu Null werden läßt d. h. wenn

$$\underset{\varepsilon_1=0,\ \varepsilon_2=0,\ \ldots}{L} F(x_1+\varepsilon_1, x_2+\varepsilon_2, \ldots) = F(x_1, x_2, \ldots)$$

wird, sobald man $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ irgend solche Wertsysteme $\varepsilon_1^{(h)}, \varepsilon_2^{(h)}, \ldots$ durchlaufen läßt, daß einzeln

$$\underset{h=\infty}{L}\,\varepsilon_1^{(h)}=0,\quad \underset{h=\infty}{L}\,\varepsilon_2^{(h)}=0,\ \ldots$$

ist. Wenn eine Funktion für jedes Wertsystem der Variabeln mit konvergenter Quadratsumme vollstetig ist, so heiße sie schlechthin *vollstetig*.

图 3.3　希尔伯特引入的全连续概念①

希尔伯特还研究了全连续无穷二次型的一些性质. 他指出全连续的无穷二次型与正交变换的乘积也是全连续的，也指出全连续的无穷二次型的连续谱是空集. 如果用现代算子术语表述，即为一个紧算子与一个有界线性算子的乘积是紧算子，紧算子的连续谱为空集. 他建立了这样一个定理(见图 3.4)：

如果 $K(x,x)$ 是全连续的有界无穷二次型，则能用一个正交变换把 $K(x,x)$ 转化为

$$K(x,x)=\sum_j k_j x_j^2$$

其中，k_j 是 $K(x,x)$ 的特征值的倒数.

Satz 35. *Wenn eine beschränkte Form K vollstetig ist, so läßt sie sich stets durch eine orthogonale Substitution in die Gestalt bringen*

$$K(x)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+\cdots; \tag{83}$$

dabei sind die Größen $k_1, k_2, \ldots$ die reziproken Eigenwerte von K und besitzen, falls sie in unendlicher Anzahl vorkommen, Null als einzige Verdichtungsstelle.

图 3.4　希尔伯特对全连续无穷二次型建立的定理②

① 摘自希尔伯特《线性积分方程一般理论基础》一书的第 145 页.

② 摘自希尔伯特《线性积分方程一般理论基础》一书的第 165 页.

这个定理是有限多个变量的二次型主轴定理在无穷维情形下的推广. 也就是说，希尔伯特找到了适当的条件，即全连续的概念，使得二次型的变量个数增加到无穷多个时，主轴定理仍然成立.

希尔伯特在《线性积分方程一般理论基础》的第四章第二节建立了这样一个非常重要的定理：

如果双线性形式 $A(x,y)=\sum_{p,q=1}^{\infty}a_{pq}x_p y_q$ 是全连续的，则无穷维线性方程组

$$x_i+\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j=a_i,\qquad i=1,2,\cdots \tag{3.2}$$

要么对所有平方可和的 $\{a_i\}$ 有唯一的平方可和的解，要么相应的齐次方程组

$$x_i+\sum_{j=1}^{\infty}a_{ij}x_j=0,\qquad i=1,2,\cdots \tag{3.3}$$

有非零解 $\alpha=\{\alpha_1,\alpha_2,\cdots\}$，且 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2=1$.

接着，希尔伯特证明了无穷维齐次线性方程组(3.3)至多有有限多个线性无关的非零解. 如果方程组(3.3)有 n 个线性无关解，则转置齐次线性方程组

$$x_j+\sum_{i=1}^{\infty}a_{ij}x_i=0,\qquad j=1,2,\cdots$$

也有 n 个线性无关解. 假设用 $\beta^{(h)}=(\beta_1^{(h)},\beta_2^{(h)},\cdots)$（$h=1,2,\cdots,n$）来表示这些解，则方程组(3.2)有解的充分必要条件是 $\{a_i\}$ 满足 n 个正交条件

$$\sum_{i=1}^{\infty}\beta_i^{(h)}a_i=0,\qquad h=1,2,\cdots,n$$

弗雷德霍姆利用线性积分方程与线性方程组之间的类似性建立了著名的弗雷德霍姆择一定理. 希尔伯特在这里发现，如果无穷维线性方程组 $(I+A)x=y$ 中的矩阵 A 能定义一个全连续的双线性形式，则 $(I+A)x=y$ 满足择一性. 也就是说，他发现全连续概念的引入是保证弗雷德霍姆方法得以成功的关键.

希尔伯特引入的全连续概念是泛函分析中的一个重要概念，后来里斯

(Frigyes Riesz，1880—1956)结合弗雷歇(René Maurice Fréchet，1878—1973)的紧集概念重新表述这个概念时，定义了全连续算子，也就是紧算子. 紧算子是一类特殊的有界线性算子，它的理论是算子理论中的重要内容. 希尔伯特对全连续的无穷二次型证明的几个性质也成为紧算子的重要性质.

3.3　谱理论在积分方程上的应用

1906 年，希尔伯特发表了关于积分方程研究的第五篇文章，题目为“线性积分方程一般理论的新的证明”. 这篇文章就是《线性积分方程一般理论基础》一书的第五章. 他在这一章中以谱理论为基础建立了一种处理积分方程的新方法.

希尔伯特在其书中第五章第一节“非对称核的积分方程”中先定义区间 $[a,b]$ 上的一组连续函数 $\{\Phi_p(s)\}$，可以做成一个完备规范正交系，即它们满足下面两个条件：

(1) 正交性：

$$\int_a^b \Phi_p(s)\Phi_q(s)\,\mathrm{d}s = \delta_{pq}, \qquad p,q = 1,2,\cdots$$

(2) 完备性：

对定义在 $[a,b]$ 上的任意一对连续函数 $u(s)$ 和 $v(s)$，都有

$$\int_a^b u(s)v(s)\,\mathrm{d}s = \sum_{p=1}^{\infty}\int_a^b \Phi_p(s)u(s)\mathrm{d}s\int_a^b \Phi_p(s)v(s)\mathrm{d}s$$

他称数值

$$u_p(*) = \int_a^b \Phi_p(s)u(s)\mathrm{d}s$$

为函数 $u(s)$ 关于完备规范正交系 $\{\Phi_p(s)\}$ 的傅里叶系数.

希尔伯特首先证明了在任意有限区间 $[a,b]$ 上，都可以定义一个完备规范正交系，例如可以使用多项式列. 然后他证明了广义的贝塞尔不等式

$$u_1^2(*) + u_2^2(*) + \cdots + u_n^2(*) \leqslant \int_a^b u^2(s)\mathrm{d}s$$

成立，也表明条件

$$\int_a^b u^2(s)\mathrm{d}s = \sum_{p=1}^{\infty}(u_p^*)^2$$

与前面定义的完备性是等价的. 有了完备规范正交系，希尔伯特就能够得到积分方程

$$f(s) = \varphi(s) + \int_a^b K(s,t)\varphi(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.4}$$

中的各个函数关于该完备规范正交系$\{\Phi_p(s)\}$的傅里叶系数，这里不要求积分方程的核$K(s,t)$是对称的. 他对核$K(s,t)$定义

$$k_q(s) = \{K(s,*)\}_q = \int_a^b K(s,t)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}t \tag{3.5}$$

再定义

$$a_{pq} = \{K_p(*)\}_q = \int_a^b\int_a^b K(s,t)\Phi_p(s)\Phi_q(t)\,\mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

他称$\{a_{pq}\}$为核$K(s,t)$的双重傅里叶系数. 函数$f(s)$关于完备规范正交系$\{\Phi_p(s)\}$的傅里叶系数为

$$a_p = f_p^* = \int_a^b \Phi_p(s)f(s)\mathrm{d}s$$

由a_{pq}和a_p的定义及贝塞尔不等式，可以得出

$$\sum_{p,q=1}^{\infty} a_{pq}^2 \leqslant \int_a^b\int_a^b K^2(s,t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t < \infty \tag{3.6}$$

和

$$\sum_{p=1}^{\infty} a_p^2 = \int_a^b f^2(s)\,\mathrm{d}s < \infty$$

因而，希尔伯特可以将积分方程(3.4)转化为无穷维线性方程组

$$x_p + \sum_{q=1}^{\infty} a_{pq}x_q = a_p, \qquad p = 1, 2, \cdots \tag{3.7}$$

他将积分方程(3.4)中未知函数$\varphi(s)$的求解问题，转化为确定无穷维线性方程组(3.7)中的未知数x_p的问题．由式(3.6)可知，核$K(s,t)$关于完备规范正交系$\{\Phi_p(s)\}$的双重傅里叶系数$\{a_{pq}\}$，可以定义一个全连续的双线性形式．又由于$\{a_p\}$是平方可和序列，因此由《线性积分方程一般理论基础》的第四章中建立的定理可知，无穷维线性方程组(3.7)的解有两种情形．

第一种情形：无穷维线性方程组(3.7)有唯一的平方可和解$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$．

由前面完备性的定义，可知

$$\sum_{p=1}^{\infty}k_p^2(s)=\int_a^b K^2(s,t)\mathrm{d}s$$

所以

$$\sum_{p=1}^{\infty}k_p^2(s)\leqslant(b-a)\max(K^2(s,t))=C$$

即$\{k_p(s)\}$是平方可和的．令

$$\alpha(s)=\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p k_p(s)$$

根据施瓦兹不等式

$$\left|\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p k_p(s)\right|\leqslant\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_p^2}\sqrt{\sum_{p=1}^{\infty}k_p^2(s)}$$

以及$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$是平方可和的，有$\alpha(s)$在$[a,b]$上是一致收敛的．因为

$$\begin{aligned}\int_a^b\Phi_p(s)\alpha(s)\mathrm{d}s&=\int_a^b\Phi_p(s)\left(\sum_{q=1}^{\infty}\alpha_q k_q(s)\right)\mathrm{d}s\\&=\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_q\int_a^b\Phi_p(s)k_q(s)\mathrm{d}s=\sum_{p=1}^{\infty}\alpha_q a_{pq}\end{aligned}$$

又有$\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$是方程组(3.7)的解，所以

$$\alpha_p+\int_a^b\Phi_p(s)\alpha(s)\mathrm{d}s=a_p$$

从而有

$$\int_a^b \Phi_p(s)\alpha(s)\mathrm{d}s = a_p - \alpha_p$$

令 $\varphi(s) = f(s) - \alpha(s)$，因而函数 $\varphi(s)$ 的第 p 个傅里叶系数为

$$\begin{aligned}\int_a^b \Phi_p(s)\alpha(s)\mathrm{d}s &= \int_a^b \Phi_p(s)f(s)\mathrm{d}s - \int_a^b \Phi_p(s)\alpha(s)\mathrm{d}s \\ &= a_p - (a_p - \alpha_p) = \alpha_p\end{aligned}$$

如果 $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots)$ 是无穷维线性方程组(3.7)的唯一的平方可和解，则函数 $\varphi(s)$ 是积分方程(3.4)的一个连续解.

反之，如果函数 $\varphi(s)$ 是积分方程(3.4)的任意连续解，取

$$u(t) = \varphi(t), \quad v(t) = K(s,t)$$

由完备性的定义，可知

$$\int_a^b \varphi(t)K(s,t)\mathrm{d}t = \int_a^b \Phi_p(t)\varphi(t)\mathrm{d}t \int_a^b \Phi_p(t)K(s,t)\mathrm{d}t = \sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p k_p(s)$$

由函数 $\varphi(s)$ 是积分方程(3.4)的解，可知

$$\int_a^b \varphi(t)K(s,t)\mathrm{d}t = f(s) - \varphi(s)$$

从而可得

$$\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p k_p(s) = f(s) - \varphi(s)$$

对上式两边同乘以 $\Phi_q(s)\mathrm{d}s$ 再积分，可以得到

$$\sum_{p=1}^{\infty} \alpha_p a_{pq} = a_q - \alpha_q, \qquad q = 1, 2, \cdots$$

因而，函数 $\varphi(s)$ 的傅里叶系数为 $\alpha = \{\alpha_p\}$，且它是无穷维线性方程组(3.7)的一个解.

综上，希尔伯特得出当无穷维线性方程组(3.7)有唯一解时，积分方程(3.4)也有唯一解.

第二种情形：式(3.7)对应的齐次线性方程组有非零解 $\alpha=(\alpha_1,\alpha_2,\cdots)$，且 $\sum_{i=1}^{\infty}\alpha_i^2=1$.

希尔伯特根据无穷维齐次线性方程组的解的情况与转置齐次线性方程组的解之间的联系，讨论了式(3.4)对应的齐次积分方程

$$\varphi(s)+\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t=0 \tag{3.8}$$

的解与其转置方程

$$\varphi(s)+\int_a^b K(t,s)\varphi(t)\mathrm{d}t=0 \tag{3.9}$$

的解之间的关系. 令 $\{\psi^{(h)}(s)\}$ 是积分方程(3.9)的解，其傅里叶系数记为 $\{\beta^{(h)}\}$，而它是齐次线性方程组

$$x_q+\sum_{p=1}^{\infty}a_{qp}x_p=0,\qquad q=1,2,\cdots$$

的解. 因而积分方程(3.8)有非零解的充分必要条件是 $f(s)$ 正交于积分方程(3.9)的解 $\{\psi^{(h)}(s)\}$，即

$$\int_a^b \psi_i(s)f(s)\mathrm{d}s=0,\qquad i=1,2,\cdots,n$$

因此，希尔伯特建立了积分方程的择一定理：

积分方程(3.4)要么存在唯一解，要么相应的齐次积分方程(3.8)有 n 个线性无关解.

在后一种情形中，积分方程(3.4)有解的充分必要条件是 $f(s)$ 正交于转置齐次积分方程(3.9)的 n 个线性无关解.

在《线性积分方程一般理论基础》一书的第五章第二节“正交积分方程的理论”中，希尔伯特又将注意力转向积分方程

$$f(s)=\varphi(s)-\lambda\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t \tag{3.10}$$

的特征问题上，这里他又重新假设核 $K(s,t)$ 是对称的. 他也写道：

“通过这些新的、更简单和更显然的方法，不仅会产生所有有关积分方程的已知结果，而且可能大大地扩展和完善了积分方程理论.”

积分方程的核$K(s,t)$的对称性表明，它的双重傅里叶系数$\{a_{pq}\}$可以定义一个全连续的无穷二次型

$$K(x,x)=\sum_{p,q=1}^{\infty}a_{pq}x_p x_q$$

因此存在一个正交变换$L_p(x)=x'_p$，能够将无穷二次型$K(x,x)$转化为

$$K(x,x)=\sum_{p=1}^{\infty}k_p x'^2_p$$

其中，k_p是无穷二次型$K(x,x)$的特征值的倒数. 定义核$K(s,t)$的特征函数为$\varphi_p(s)$，则

$$L_p(k(s))=\sum_{q=1}^{\infty}l_{pq}k_q(s)=k_p\varphi_p(s)$$

其中，$k_q(s)$是由式(3.5)定义的. 根据$\{l_{pq}\}$的性质，他指出特征函数系$\{\varphi_p(s)\}$可以形成一个规范正交系，且满足

$$\varphi_p(s)=\lambda_p\int_a^b K(s,t)\varphi_p(t)\mathrm{d}t$$

其中，$\lambda_p=\dfrac{1}{k_p}$. 也就是说，希尔伯特指出积分方程(3.10)存在对应于特征值的特征函数.

随后，希尔伯特在《线性积分方程一般理论基础》一书的第 190 页重新建立了函数关于特征函数的展开定理，即他指出每个形如

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)g(t)\mathrm{d}t$$

的函数可以展开为

$$f(s)=\sum c_n\varphi_n(s)$$

其中，$c_n=\int_a^b f(s)\varphi_n(s)\mathrm{d}s$. 他运用这个定理证明了一些结果. 他指出积分方程(3.10)

相应的齐次积分方程只有在$\lambda=\lambda_p$时存在非零解. 如果λ_p的重数为n，则它有n个线性无关解. 希尔伯特又重新建立了择一定理：

当$\lambda\neq\lambda_p$时，积分方程(3.10)有唯一解；当$\lambda=\lambda_p$时，积分方程(3.10)有解的充分必要条件是满足n个条件

$$\int_a^b \varphi_q(s)f(s)\mathrm{d}s=0,\qquad q=p,p+1,\cdots,p+n-1$$

为了完成与有限维情形的类比，希尔伯特给出

$$K(s,t)=\sum_{p=1}^{n}\frac{\varphi_p(s)\varphi_p(t)}{\lambda_p}$$

从而对任意连续函数$u(s)$可以得出

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)u(s)u(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\sum_{p=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_p}\left(\int_a^b u(t)\varphi_p(t)\mathrm{d}t\right)^2$$

这是他在 1904 年的第一篇文章中建立的广义主轴定理. 当时希尔伯特是从有限维的二次型主轴化的代数理论出发，利用对称核的双重积分与对称双线性形式之间的类似性，通过极限过渡的方法建立的.

对于希尔伯特积分方程工作的重要意义，柯朗这样评述：

“科学成就的重要性往往并不只是表现为在已有的材料上添加新东西，对于科学的进步来说，使已有的但是繁杂的研究领域条理化、简单化和明确化，这样一种探讨绝不是次要的. 通过这样的探讨，有助于或至少可能从整体上来观察、理解和把握这门科学. 我们不应该忘记希尔伯特在分析学方面的工作所反映的这一观点……因为所有这些工作都体现了他的特殊努力，即在解决新问题的同时寻求使老问题化难为易的方法，在已有的材料之间建立新的联系，同时使许多个别研究的分散支流汇入一条统一的河道.”

希尔伯特的研究方式是直接攻克数学中的具体问题，从中寻找带普遍性的方法，开辟新的研究领域. 他在分析学中的目标是将所有线性问题都统一到方程$\lambda x-Tx=y$的理论上，运用代数的思想方法来处理，进而从方法论的角度达到处理分析学问题的统一途径(见 3.1 节).

只有线性变换或线性算子的谱理论的建立，才能完全解决大量线性方程的求解问题. 于是，希尔伯特在 1906 年的第四篇文章中没有再研究积分方程而是建立了谱理论. 这篇文章被称为是泛函分析的四项奠基性工作之一，在数学发展史上产生了非常深远的影响，是希尔伯特在分析学研究上取得的登峰造极的成果. 虽然希尔伯特没有提到“空间”或“函数空间”，但是他实际上已经建立了 l^2 空间中算子的谱理论(见本书 3.2 节)，这为后来算子谱理论的发展提供了样板. 他在这篇文章中也发现弗雷德霍姆理论得以建立的关键在于全连续概念的引入.

希尔伯特在第五篇文章中将其谱理论应用到积分方程(不要求核是对称核)的处理上. 首先，他定义区间上一组连续函数做成一个完备规范正交系，得到积分方程中各函数关于该完备规范正交系的傅里叶系数，将给定的积分方程转化为一个由傅里叶系数构成的无穷维线性方程组. 从而将积分方程中未知函数的求解转化为确定它的傅里叶系数，可以应用第四篇文章中谱理论的结果(见本书 3.3 节).

一个数学家对数学发展的推动不仅与他自己的研究成果有关，而且还与他对同时代人，尤其对年轻人提供的方向、研究环境以及引领他们所做出的贡献有关. 希尔伯特的数学工作博大精深，但是他的影响不完全来自他的数学工作.

1895 年，希尔伯特在克莱因(Felix Klein，1849—1925)的邀请下来到哥廷根大学. 哥廷根大学有着良好的数学传统. 在希尔伯特和克莱因的共同努力下，20 世纪初的 30 多年间，哥廷根大学成为名副其实的数学研究和教育的国际中心. 当时全世界的数学研究者都受到这样的鼓舞：

“打起你的背包，到哥廷根去!”

于是，一批优秀的青年学者纷纷涌向哥廷根大学. 许多人之所以来到这里，仅仅是因为这里有希尔伯特. 当时听希尔伯特讲课的学生常常达到几百人，有时候连窗台上都坐满了人. 他积极热情地从事教学活动，给予学生和年轻学者激励与帮助，使得他成为一个强大的国际学派的领头人，有一大批的追随者，如施密特(Erhard Schmidt，1876—1959)、里斯、外尔、巴拿赫(Stefan Banach，1892—1945)、冯・诺依曼(John von Neumann，1903—1957)等.

希尔伯特在积分方程方面的工作正如他过去在代数和几何方面的工作一样，开辟了一个广阔的研究领域. 积分方程也成为 20 世纪初期的研究热点之一.

(1) 施密特是希尔伯特的博士生. 他在其 1905 年的博士学位论文中简化和扩展了希尔伯特 1904 年关于对称核积分方程的特征值理论的工作. 他的理论不再依赖弗雷德霍姆理论，向现代数学迈进了一步. 1907 年，他又将对称核积分方程理论推广到非对称核的积分方程上，拓广了积分方程的研究范围(见本书第 4 章).

(2) 外尔也是希尔伯特的博士生. 他在其博士学位论文中将希尔伯特理论推广到积分限为半无界的奇异积分方程上.

(3) 运用勒贝格积分这个全新数学工具，匈牙利数学家里斯建立了里斯–费舍尔定理，发现了两个典型巴拿赫空间，即 L^p 空间和 l^p 空间. 将积分方程中的表达式 $\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ 看成是作用在函数 $\varphi(t)$ 上的算子，从算子理论的角度来处理积分方程，建立了其紧算子理论(见本书第 5 章).

(4) 波兰数学家巴拿赫为了将积分方程理论一般化，他在其 1922 年的博士学位论文中开始了对赋范空间理论的广泛研究(见本书第 5 章).

(5) 冯·诺依曼以更为抽象的形式表述了希尔伯特的理论，使已推广的希尔伯特理论能够满足量子力学发展的需要，从而建立了抽象希尔伯特空间理论(见本书第 6 章).

第 4 章　希尔伯特空间的诞生

1907 年，为推广希尔伯特的工作，里斯借助勒贝格积分建立了里斯–费舍尔定理. 1908 年，施密特将平方可和的无穷序列看成是空间中的点或元素，对空间中的两个元素定义内积，进而建立了希尔伯特序列空间 l^2. 里斯–费舍尔定理表明平方可和的序列空间 l^2 与勒贝格平方可积的函数空间 L^2 是同构的. 这两个空间是希尔伯特空间的两种典型的具体形式.

4.1　希尔伯特序列空间的建立

施密特(见图 4.1)是希尔伯特最优秀的学生之一. 在其 1905 年的博士学位论文中，施密特对希尔伯特对称核积分方程的特征值理论进行了简化和扩展，这项工作无论在数学内容，还是在数学表述上都更接近现代数学. 1908 年，他将平方可和的无穷序列看成是空间中的点或元素，建立了一个具体的无穷维线性空间，这就是历史上最早的无穷维空间，即“希尔伯特空间”.

图 4.1　施密特

4.1.1　施密特的早期工作

为了让研究和教学保持紧密的联系，希尔伯特时常在课堂和讨论班上报告他还没有成型的结果. 因此，他的研究工作往往由学生继续下去. 希尔伯特的对称核积分方程的特征值理论在一个关键之处“艰涩难证”. 对此，他期望能有一种简单的改进方法. 1905 年，施密特完成了希尔伯特的心愿，他在其博士学位论文中简化和扩展了希尔伯特的结果. 1907 年，施密特将这篇学位论文连同对非对称核积分方程的研究成果一起发表在《数学年刊》(*Mathematische Annalen*) 上，题目为“线性和非线性的积分方程理论”.

对于这篇文章的写作意义，施密特说道：

“我对希尔伯特得到的一些定理给出非常简单的证明，证明中避免从代数定理出发的极限过渡. 首先，按照施瓦兹的著名证明来建立特征值的存在性定理，就弗雷德霍姆公式而言，这等同于用伯努利的方法来求解方程 $\delta(\lambda)=0$. 通过一种方法，从存在性定理中建立展开定理，这类似于根据代数的基本定理，将整函数展开成线性因子的乘积. 希尔伯特在文章中得到的定理绝对正确，不过，不需要假定核的‘一般性’. 希尔伯特的分解定理对应的是二次型的古典正交分解，它可以从展开定理中得到. 在我这篇文章的证明中，避免了函数 $\delta(\lambda)=0$ 的重零点引起的复杂性.”

这篇论文的第一章“正交函数的初步结果”共有三个小节. 在第一节中，他先定义了规范正交系，接着证明了贝塞尔不等式和施瓦兹不等式. 令 $\{\psi_n(x)\}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的连续实函数. 如果对每个不同的指标 h 和 k，有

$$\int_a^b \psi_h(x)\psi_k(x)\mathrm{d}x=0$$

成立，则称 $\{\psi_n(x)\}$ 是两两正交的. 通过条件

$$\int_a^b (\psi_k(x))^2\mathrm{d}x=1$$

可以将正交函数系 $\{\psi_n(x)\}$ 标准化. 接着他指出对任意实连续函数 $f(x)$，贝塞尔等式

$$\int_a^b (f(x)-\sum_{k=1}^n \psi_k(x)\int_a^b f(y)\,\psi_k(y)\,\mathrm{d}y)^2\,\mathrm{d}x$$
$$=\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x-\sum_{k=1}^n\left(\int_a^b f(y)\,\psi_k(y)\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}y$$

成立. 因为贝塞尔等式恒大于零，所以他证明了贝塞尔不等式

$$\sum_{k=1}^n\left(\int_a^b f(y)\,\psi_k(y)\mathrm{d}y\right)^2\mathrm{d}y\leqslant\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

成立. 令 $f(x)$ 和 $\varphi(x)$ 是两个实连续函数，如果取

$$\psi_1(x)=\frac{\varphi(x)}{\sqrt{\int_a^b(\varphi(y))^2\,\mathrm{d}y}}$$

则当 $n=1$ 时，由贝塞尔不等式可知

$$\left(\int_a^b f(x)\,\psi_1(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x$$

于是，他证明了施瓦兹不等式

$$\left(\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\mathrm{d}x\right)^2\leqslant\int_a^b (f(x))^2\,\mathrm{d}x\int_a^b(\varphi(x))^2\,\mathrm{d}x$$

施密特在其论文第一章的第二节证明了绝对且一致收敛的一些结果. 在第三节中，令 $\{\varphi_n(x)\}$ 是定义在 $[a,b]$ 上线性无关的连续实函数，施密特对 $\{\varphi_n(x)\}$ 构造了下面的一系列等式

$$\psi_1(x)=\frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\int_a^b(\varphi_1(y))^2\,\mathrm{d}y}}$$

$$\psi_2(x)=\frac{\varphi_2(x)-\psi_1(x)\int_a^b\varphi_2(z)\psi_1(z)\,\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_a^b\left(\varphi_2(y)-\psi_1(y)\int_a^b\varphi_2(z)\psi_1(z)\,\mathrm{d}z\right)^2\mathrm{d}y}}$$

$$\vdots$$

$$\psi_n(x)=\frac{\varphi_n(x)-\sum_{k=1}^{n-1}\psi_k(x)\int_a^b\varphi_n(z)\psi_k(z)\,\mathrm{d}z}{\sqrt{\int_a^b\left(\varphi_n(y)-\sum_{k=1}^{n-1}\psi_k(y)\int_a^b\varphi_n(z)\psi_k(z)\mathrm{d}z\right)^2\mathrm{d}y}}$$

这就是施密特标准正交化过程，即可以将一组线性无关的函数标准正交化为一个规范正交系. 他引进的正交化方法可以将“傅里叶展开”看成是空间中的正交分解，从而会简化许多步骤. 在文章的脚注中，他指出格拉姆(Jørgen Pedersen Gram，1850—1916)也给出过相同的公式. 现在这一过程被称为施密特-格拉姆标准正交化过程.

施密特在这篇论文第二章“对称核线性积分方程”中简化和扩展了希尔伯特的工作，这是论文中最重要的部分. 他在第四节重新定义了对称核积分方程(2.1)的特征值和特征函数. 如果 $\varphi(s)$ 是不恒为零的任意实的或复的连续函数，且满足

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t$$

则称 $\varphi(s)$ 是对称核 $K(s,t)$ 对应于特征值 λ 的特征函数，这正是现在积分方程教科书中特征值和特征函数的定义.

根据上面给出的定义，有

$$\varphi_h(s)=\lambda_h\int_a^b K(s,t)\,\varphi_h(t)\mathrm{d}t \tag{4.1}$$

和

$$\varphi_k(s)=\lambda_k\int_a^b K(s,t)\,\varphi_k(t)\mathrm{d}t \tag{4.2}$$

如果对式(4.1)两端同乘以 $\lambda_k\varphi_k(s)$，对式(4.2)两端同乘以 $\lambda_h\varphi_h(s)$，从 a 到 b 积分后再相减，则根据 $K(s,t)$ 的对称性可以得到

$$(\lambda_h-\lambda_k)\int_a^b\varphi_h(s)\,\varphi_k(s)\mathrm{d}s=0$$

因此，施密特证明了对应于不同特征值 λ_h 和 λ_k 的特征函数 $\varphi_h(s)$ 和 $\varphi_k(s)$ 是相互正交的.

随后，施密特指出，如果$\varphi_k(s)$是对应于复特征值λ的特征函数，则$\overline{\varphi_k(s)}$是对应于特征值$\overline{\lambda}$的特征函数. 因为两个特征值λ和$\overline{\lambda}$不相等，所以$\varphi_k(s)$和$\overline{\varphi_k(s)}$一定正交. 但是两个共轭函数的乘积的积分大于零，所以积分方程的所有特征值都是实数.

施密特在其论文第二章的第五节指出，如果用前面给出的方法将对应于特征值λ的n个线性无关的特征函数标准正交化，则得到的函数系是一个规范正交系. 这个规范正交系中包含的函数的个数与特征函数的个数一样多. 再根据贝塞尔不等式，可得出

$$n \leqslant \lambda^2 \int_a^b \int_a^b (K(s,t))^2 \mathrm{d}s\mathrm{d}t$$

因此，施密特证明了对应于某个特征值的线性无关的特征函数会有有限多个.

1904 年，希尔伯特在第一篇文章“线性积分方程一般理论”的第三章中引入二次叠核，讨论了核的特征值和特征函数与二次叠核的特征值和特征函数之间的关系. 施密特在其论文第二章第六节详细研究了核的特征值和特征函数与n次叠核的特征值和特征函数之间的关系. 他定义了n次叠核

$$K^n(s,t) = \int_a^b K(s,r)K^{n-1}(r,t)\mathrm{d}r$$

其中$K^1(s,t) = K(s,t)$. 如果将$K^{n+1}(s,t)$看成是$n+1$个核的乘积的n重积分，则可以得到

$$K^{h+k}(s,t) = \int_a^b K^h(s,r)K^k(r,t)\mathrm{d}r$$

和

$$K^h(s,t) = K^h(t,s)$$

且不存在函数$K^n(s,t)$关于s和t是恒等于零的. 根据特征函数的定义，有

$$\varphi(s) = \lambda \int_a^b K(s,t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t$$

所以

$$\varphi(s)=\lambda^n\int_a^b K^n(s,t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t$$

因此，核 $K(s,t)$ 的特征函数都是叠核 $K^n(s,t)$ 的特征函数.

施密特接着研究叠核的特征函数与核的特征函数之间的关系. 他指出当 n 为奇数时，$K^n(s,t)$ 的特征函数为 $K(s,t)$ 的特征函数；当 n 为偶数时，$K^n(s,t)$ 的特征函数或者是 $K(s,t)$ 的特征函数，或者是两个特征函数的和. 施密特引入叠核还有两个非常重要的用处：

（1）运用二次叠核证明了非零对称核的特征函数的存在性；

（2）通过 $K^4(s,t)$ 的良好性质

$$K^4(s,t)=\sum_n\frac{\varphi_n(s)\varphi_n(t)}{\lambda_n^4}$$

的右边的级数绝对且一致收敛，建立了他的展开定理.

在论文第二章的第七节，施密特建立了特征函数的存在定理，他称这个定理为“基础定理”，而该定理的证明过程推后到第十一节. 根据施瓦兹的方法，他证明 $K^2(s,t)$ 至少有一个特征函数. 再根据前面得到的核的特征函数与其叠核的特征函数之间的关系，他证明了每个不恒为零的核 $K(s,t)$ 至少有一个特征函数. 与希尔伯特相比，施密特证明存在特征函数的方法要简单很多.

施密特在第九节根据 $K^4(s,t)$ 的性质先建立了这样一个定理：

如果有连续函数 $h(s)$，使得

$$\int_a^b K(s,t)h(t)\mathrm{d}t=0$$

则

$$\int_a^b h(s)\varphi_n(s)\mathrm{d}s=0$$

这里的 $\varphi_n(s)$ 是积分方程的特征函数.

他指出这个定理的反定理也是成立的. 随后施密特根据这个定理，重新建立了希尔伯特的展开定理：

如果 $f(s)$ 对某个连续函数 $x(s)$，有

$$f(s)=\int_a^b K(s,t)x(t)\mathrm{d}t$$

则它可以关于对称核积分方程的特征函数 $\varphi_n(s)$ 展开成下面的级数形式

$$f(s)=\sum c_n\varphi_n(s) \tag{4.3}$$

其中 $c_n=\int_a^b f(s)\varphi_n(s)\mathrm{d}s$，级数 (4.3) 绝对且一致收敛.

这个展开定理后来被称为希尔伯特-施密特展开定理.

施密特从他的展开定理中得到

$$f(s)=\sum_n\int_a^b K(s,t)\,\varphi_n(t)\mathrm{d}t\int_a^b x(t)\,\varphi_n(t)\,\mathrm{d}t \tag{4.4}$$

对式 (4.4) 两边同乘以 $y(s)\mathrm{d}s$，再从 a 到 b 积分，根据特征函数的定义，可得到

$$\int_a^b\int_a^b K(s,t)\,x(s)y(t)\mathrm{d}s\mathrm{d}t=\sum_n\frac{1}{\lambda_n}\int_a^b x(s)\,\varphi_n(s)\mathrm{d}s\int_a^b y(s)\,\varphi_n(s)\mathrm{d}s$$

这就是希尔伯特建立的广义主轴定理. 对此，施密特说道：

“希尔伯特将二次型的古典分解极限过渡后得到了这个式子，是他工作中的基础公式. 希尔伯特运用这个式子得到了我们第二章第八节中的结果，对所有核建立了第九节中的第一个定理，对‘一般核’建立了展开定理.”

在施密特的工作中，特征函数存在性的证明以及展开定理的建立都不再依赖这个广义主轴定理. 而与希尔伯特不同的是，施密特先建立展开定理，再根据展开定理来建立广义主轴定理.

在简化和扩展了希尔伯特的工作后，施密特将研究的注意力转向了非对称核的积分方程. 他在论文第三章“非对称核的积分方程”中先对非对称核的积分方程定义了特征值和特征函数. 如果 $\varphi(s)$ 和 $\psi(s)$ 是不恒为零的任意实或复的连续函数且满足

$$\varphi(s)=\lambda\int_a^b K(s,t)\psi(t)\mathrm{d}t$$

和

$$\psi(s)=\lambda\int_a^b K(t,s)\,\varphi(t)\mathrm{d}t$$

则称函数对 $\varphi(s)$ 和 $\psi(s)$ 是非对称核 $K(s,t)$ 的对应于特征值 λ 的一对伴随的特征函数. 接下来，施密特把对称核积分方程上建立的展开定理和广义主轴定理推广到非对称核的积分方程上，给出了一些新的定理. 他对非对称核的积分方程的研究大大扩展了当时积分方程的研究范围，这是他这一工作中最有意义的贡献. 无论在数学内容还是数学方法上，施密特都比他的老师希尔伯特更接近现代数学.

4.1.2　希尔伯特序列空间的诞生

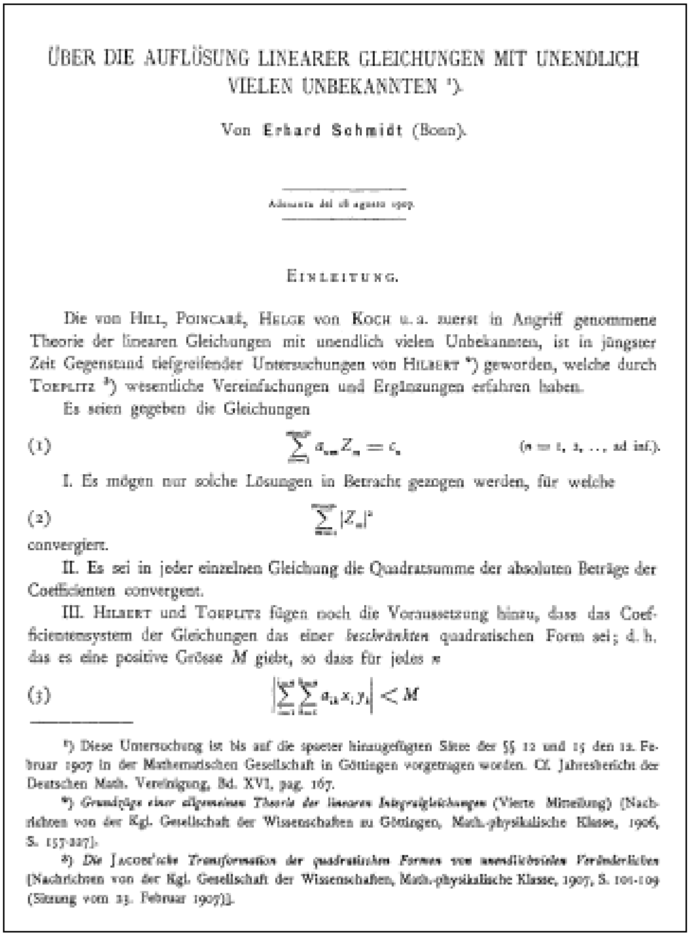
希尔伯特在建立对称核积分方程的特征值理论的工作中，把一个函数看成是它对应于某规范正交系的傅里叶系数给出的. 这些系数以及他在无穷二次型的谱理论中引入的无穷序列都是平方可和的. 一对变量可以表示平面上的点，三个变量可以表示三维空间中的点，定义无穷二次型的无穷多个变量可以表示无穷维序列空间中的点. 然而，希尔伯特没有将这些平方可和的无穷序列看成是空间中点的坐标，也没有使用几何语言，他的工作都是在欧氏几何的类比中完成的.

1908 年，施密特成为柏林大学的讲师，发表了一篇题目为“无穷多个变量的线性方程组的解”的论文(见图 4.2). 正是在这篇论文中，施密特不仅把平方可和的实序列而且把复序列都看成是空间中的点或元素，清晰地发展了一个希尔伯特空间，并对该空间引入了几何语言. 这篇论文和他的博士学位论文一样，又一次把他的老师希尔伯特的工作向前推进了一步.

论文共有两章内容. 在第一章第一节“毕达哥拉斯定理和贝塞尔不等式”中，施密特建立了三角不等式和推广的勾股定理. 在这一节的脚注中，他提到了弗雷歇于 1906 年发表的博士学位论文，弗雷歇正是在这篇论文中创造了度量空间的抽象理论，他的这一工作在数学发展中产生了深刻且深远的影响.

施密特把 $A(x)$ 看成是“函数”，将 $A(x)$ 构成的空间称为“函数空间”. 其实施密特的“函数空间”是一种特殊的空间，即平方可和的无穷序列构成的空间. 下面我们用符号 $x=\{\zeta_n\}$ 来代替施密特的符号 $A(x)$. 对于两个元素 $x=\{\xi_n\}$，$y=\{\eta_n\}$，施密特定义内积

$$(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\eta_n$$



ÜBER DIE AUFLÖSUNG LINEARER GLEICHUNGEN MIT UNENDLICH VIELEN UNBEKANNTEN [1]).

Von Erhard Schmidt (Bonn).

Adunanza del 28 agosto 1907.

EINLEITUNG.

Die von HILL, POINCARÉ, HELGE VON KOCH u. a. zuerst in Angriff genommene Theorie der linearen Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten, ist in jüngster Zeit Gegenstand tiefgreifender Untersuchungen von HILBERT [2]) geworden, welche durch TOEPLITZ [3]) wesentliche Vereinfachungen und Ergänzungen erfahren haben.

Es seien gegeben die Gleichungen

(1) $$\sum_{m=1}^{m=\infty} a_{nm} Z_m = c_n \qquad (n = 1, 2, \ldots, \text{ad inf.}).$$

I. Es mögen nur solche Lösungen in Betracht gezogen werden, für welche

(2) $$\sum_{m=1}^{m=\infty} |Z_m|^2$$

convergiert.

II. Es sei in jeder einzelnen Gleichung die Quadratsumme der absoluten Beträge der Coefficienten convergent.

III. HILBERT und TOEPLITZ fügen noch die Voraussetzung hinzu, dass das Coefficientensystem der Gleichungen das einer *beschränkten* quadratischen Form sei; d. h. das es eine positive Grösse M giebt, so dass für jedes n

(3) $$\left|\sum_{i=1}^{i=n}\sum_{k=1}^{k=n} a_{ik} x_i y_k\right| < M$$

[1]) Diese Untersuchung ist bis auf die später hinzugefügten Sätze der §§ 12 und 15 den 12. Februar 1907 in der Mathematischen Gesellschaft in Göttingen vorgetragen worden. Cf. Jahresbericht der Deutschen Math. Vereinigung, Bd. XVI, pag. 167.

[2]) *Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen* (Vierte Mitteilung) (Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, Math.-physikalische Klasse, 1906, S. 157-227).

[3]) *Die* JACOBI'*sche Transformation der quadratischen Formen von unendlichvielen Veränderlichen* (Nachrichten von der Kgl. Gesellschaft der Wissenschaften, Math.-physikalische Klasse, 1907, S. 101-109 (Sitzung vom 23. Februar 1907)).

图 4.2 论文“无穷多个变量的线性方程组的解”的首页

现在内积的记法是 $(x,y)=\sum_{n=1}^{\infty}\xi_n\overline{\eta_n}$. 当两个元素的内积为零时，他称这两个元素是正交的. 他也定义了

$$\|x\|^2=\sum_{n=1}^{\infty}|\xi_n|^2$$

这是平方可和的序列空间中的范数，施密特将其称为长度. 在 n 维欧氏空间中，用内积可以定义向量的长度、夹角以及正交性，这使得欧氏空间成为具有度量

性质的线性空间，进而扩大了线性空间理论的应用范围. 由施密特对内积的定义，可以看出他的“函数空间”是欧氏空间向无穷维的推广，他也是用内积来定义元素的“长度”和正交性的. 在论文“无穷多个变量的线性方程组的解”第一章第一节的脚注中，他指出：

“对于这一章给出的概念和定理的几何意义，我非常感谢柯瓦列夫斯基(Gerhard Kowalewski，1876—1950). 如果定义 $A(x)$ 为无穷维空间中的向量而不是函数，则结果会更加明显. 在几何的研究中，我也引入了长度 $\|A\|$ 的定义和正交性.”

随后，他证明了广义的勾股定理. 如果 $z_1, z_2, \cdots, z_n$ 是 n 个两两正交的元素，则由

$$w = \sum_{k=1}^{n} z_k$$

可以推出

$$\|w\|^2 = \sum_{k=1}^{n} \|z_k\|^2$$

根据这个式子，他推出 n 个相互正交的元素是线性无关的. 令 $\{e_n\}$ 是空间中的一个规范正交系，他给出了贝塞尔不等式

$$\sum_{n=1}^{\infty} |(x, e_n)|^2 \leqslant \|x\|^2$$

施瓦兹不等式

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|$$

以及三角不等式

$$\|x\| + \|y\| \geqslant \|z\|$$

在论文第一章第二节“强收敛的概念”中，施密特对元素列引入强收敛的概念. 收敛是分析学中的一个基本概念. 对此，希尔伯特这样说道：

“我觉得研究那些用于建立一门给定的分析理论的收敛条件，是一件非常

有意思的事情. 这种研究使我们可以确立一组最简单的基本事实，它们的证明需要一个特殊的收敛条件. 然后，只要使用这样一个收敛条件(不必附加任何其他的收敛条件)，就可以证明该分析理论中的全部定理.”

如果当$n \to \infty$时，“函数空间”中的序列$\{x_n\}$满足$\|x_n - x\| \to 0$，则施密特称序列$\{x_n\}$是强收敛于x的. 在论文第二章第四节“收敛定理”中，他用强收敛定义了空间中的柯西序列. 如果当$m, n \to \infty$时，序列$\{x_n\}$满足$\|x_m - x_n\| \to 0$，则称序列$\{x_n\}$是柯西序列. 接着施密特证明了空间中的所有柯西序列都强收敛于他的“函数空间”中的一个元素z. 因此，他的“函数空间”是完备的，将其记为l^2空间. 这是历史上第一个具体的无穷维空间，也是最早的希尔伯特空间.

在其论文第一章的基础上，施密特在第二章“无穷多个变量的线性方程组的解”中，分齐次和非齐次两种情形求解了无穷维线性方程组的解. 在第二章的第五节，他再一次建立了标准正交化过程，对空间中的元素列$\{x_n\}$，构造了下面的一系列等式

$$e_1 = x_1$$

$$e_2 = x_2 - \frac{(x_2, e_1)e_1}{\|e_1\|^2}$$

$$e_3 = x_3 - \frac{(x_3, e_1)e_1}{\|e_1\|^2} - \frac{(x_3, e_2)e_2}{\|e_2\|^2}$$

$$\vdots$$

$$e_n = x_n - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(x_n, e_k)e_k}{\|e_k\|^2}$$

他指出内积空间中的任意可列子集均可用施密特正交化方法，将其转化为一个规范正交系. 在这一节的脚注中，他提到了其1905年的博士学位论文，也再一次提到了格拉姆的正交化工作.

有了强收敛的概念后，施密特在其论文的第二章第八节“线性函数的结构”中，对他的“函数空间”引入了闭子空间这个非常重要的概念.

如果序列空间H的子集A满足:

(1) 在前面定义的强收敛的意义下，A是一个闭子集;

（2） A 是序列空间 H 的向量子空间，即若 w_1 和 w_2 是 A 中的元素，那么 $a_1w_1 + a_2w_2$ 也是 A 中的元素，其中 a_1, a_2 是任意复数.

则称子集 A 为序列空间 H 的闭子空间.

施密特指出，任取一个线性无关的元素列 $\{z_n\}$，再取 $\{z_n\}$ 中元素的所有线性组合，它们构成的集合的闭包就是这样一个闭子空间.

有了闭子空间的概念后，施密特将欧氏空间中向量投影的概念推广到他的序列空间中. 他证明了这样一个定理(见图 4.3)：

如果子空间 A 是序列空间 H 的闭子空间，则对序列空间 H 中的每个元素 z，都有下面唯一的正交分解

$$z = w_1 + w_2$$

其中 w_1 在闭子空间 A 中，w_2 在闭子空间 A 的正交补中.

现在元素 w_1 称为元素 z 在闭子空间 A 中的投影. 这个定理就是泛函分析中的投影定理，是希尔伯特空间理论中一个非常重要的定理. 施密特将这里的元素 w_2 称为“垂直函数”，他还证明了 w_2 的几个性质：w_2 是零元当且仅当 z 在 A 中；$\|w_2\| = \min\|y - z\|$，其中 y 是 A 中的任意元素，且极小值只有在 $y = w_1$ 时取得，$\|w_2\|$ 被称为 z 与 A 之间的距离.

Es durchlaufe $A_\nu(x)(\nu = 1, 2, \ldots)$ eine endliche oder unendliche Funktionenreihe. Bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$ die Menge derjenigen Funktionen, welche aus einer endlichen Anzahl der $A_\nu(x)$ linear-homogen mit constanten Coefficienten zusammengesetzt werden können, und setzen wir

(22) $$\mathfrak{A} = \mathfrak{M} + \mathfrak{M}',$$

so ist die, wie § 7 gezeigt, abgeschlossene Funktionenmenge $\mathfrak{A}$ wegen (13) ein *lineares Funktionengebilde*. Offenbar muss jedes die Funktionen $A_\nu(x)$ sämmtlich enthaltende lineare Funktionengebilde auch $\mathfrak{A}$ enthalten. Die Gesammtheit der $A_\nu(x)$ wird als eine *Basis* von $\mathfrak{A}$ bezeichnet. Jede mit der Reihe der $A_\nu(x)$ im Sinne des Schlussatzes des § 5 linear aequivalente Funktionenreihe stellt auch eine Basis von $\mathfrak{A}$ dar [13]).

图 4.3　施密特的投影定理[①]

最后，施密特以纯粹的几何方法来讨论序列空间 H 中最一般的线性方程组

① 摘自施密特的论文“无穷多个变量的线性方程组的解”的第 63 页.

$$(x, a_n) = c_n, \qquad n = 1, 2, \cdots$$

其中$\{a_n\}$是H中的任意序列，c_n是任意复数.

4.2 里斯-费舍尔定理的建立

1902 年，勒贝格(Henri Lebesgue，1875—1941)建立了勒贝格积分. 著名数学家、数学史家迪厄多内(Jean Dieudonné，1906—1992)称这项工作为泛函分析的四项奠基性工作之一，足见它在泛函分析建立过程中的重要性. 1907 年，运用勒贝格积分这个全新的数学工具，里斯(Frigyes Riesz，1880—1956)和费舍尔(Ernst Fisher，1875—1959)建立了里斯-费舍尔定理.

4.2.1 勒贝格积分的建立

17 世纪，牛顿(Isaac Newton，1643—1727)和莱布尼茨(Gottfried Wilhelm Leibniz，1646—1716)创立了微积分. 18 世纪，在伯努利家族、欧拉和拉格朗日等人的努力下，微积分进一步深入发展，逐渐形成了分析学这一数学分支，但是那个时期的数学家没有太多关注微积分的逻辑基础. 直到 19 世纪初，数学家在建立分析学的逻辑基础方面才开始取得成效. 1817 年，波尔查诺(B. Bolzano，1781—1848)(见图 4.4)最早给出了函数的连续性、导数等的合适定义，但是他的工作对当时的数学界影响不大.

图 4.4 波尔查诺

法国数学家柯西(见图4.5)是分析学严格化真正有影响的先驱. 柯西在分析学方面有两本著名的教科书:《皇家综合工科学校分析教程》(于 1821 年出版)及《皇家综合工科学校无穷小分析教程概论》(于 1823 年出版). 科西在书中对极限、连续、导数和收敛等微积分的基本概念给出了明确的定义.

柯西认为微积分应该建立在极限思想的基础上，所以他首先给出极限的定义:

当一个变量逐次所取的值无限地趋近于某个固定值时，如果变量的值同固定值之差要多小就有多小，则这个固定值被称为是所有这些值的极限.

他还举了一个例子：当一个圆的内接正多边形的边数无限增多时，多边形面积的极限就是这个圆的面积. 柯西的极限定义摆脱了运动观念，也不依赖于几何，可以构成微积分的基础. 唯一不足的是他没有用不等式的代数形式表述.

图 4.5　柯西

接着，柯西给出了无穷小量的定义:

当同一个变量逐次所取的绝对值无限减小，以至于比任意给定的数还要小时，这个变量就是无穷小或无穷小量.

并且柯西定义了无穷小量的阶，给出了无穷小量的各种例子和定理. 柯西从“无穷小量”出发，第一次解决了连续性问题.

对函数 $y=f(x)$，令 i 为无穷小量，当用 $x+i$ 代替 x 时，函数值从 y 变为

$y+\Delta y$，即 $y+\Delta y=f(x+i)$ 或 $\Delta y=f(x+i)-f(x)$．如果差值 Δy 也是无穷小量，则称函数 $y=f(x)$ 为连续函数.

柯西指出正弦函数就是连续函数. 同时，柯西发现了连续函数的一个重要性质：

如果 $f(x)$ 在 a 处连续，且 $\{x_k\}$ 满足 $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=a$，则 $\lim\limits_{k\to\infty}f(x_k)=f(\lim\limits_{k\to\infty}x_k)=f(a)$.

柯西的《皇家综合工科学校分析教程》一书中没有微分学的内容. 他在《皇家综合工科学校无穷小分析教程概论》中首次给出了导数的定义. 他定义导数为差商 $\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=\dfrac{f(x+i)-f(x)}{i}$ 的极限，其中 i 为无穷小量. 采用拉格朗日的记法，他将导数记为 y' 或 $f'(x)$. 他求出了 $y=k\pm x$，$y=kx$，$y=\dfrac{k}{x}$，$y=x^k$，$y=\log_A x$，$y=\sin x$，$y=\cos x$，$y=\arcsin x$，$y=\arccos x$ 等一些简单函数的导数. 除了没有考虑到左、右极限可能不相等，柯西的导数定义与现在的定义没有什么不同.

18 世纪，积分没有独立的定义，人们一直把积分看成是微分的逆运算. 柯西不同意这种观点. 他认为积分必须是独立存在的，并且应该有相应的定义. 于是，他给出了积分的定义. 莱布尼茨曾将积分定义为无穷多个无穷小量的和. 但是直到 19 世纪初，还没有人从这个角度来理解积分. 柯西采用了莱布尼茨的想法，分三步对 $[x_0,x]$ 上的连续函数 $f(x)$ 定义了积分.

第一步：划分区间

用 $x_i(1\leqslant i\leqslant n-1)$ 将 $[x_0,x]$ 划分为 n 个小区间.

第二步：求和

$$S=(x_1-x_0)f(x_0)+(x_2-x_1)f(x_1)+\cdots+(x-x_{n-1})f(x_{n-1})$$

第三步：取极限

当区间的个数不断增多时，这些区间的值越来越小，S 的值最终将趋近某个确定的极限，这个极限只与 $f(x)$ 的表达式以及区间的端点 x_0 和 x 有关，柯西称这个极限为定积分 $\int_{x_0}^{x}f(x)\,\mathrm{d}x$.

柯西指出积分是一种极限，并且积分的定义与反微分法无关，这是他给出积分定义的意义. 但这一定义的不足之处在于：他的积分定义只限于连续函数. 柯西也将积分思想和微分思想结合在一起，建立了微积分基本定理.

柯西迈出了分析全面严格化的关键一步，为微积分的发展提供了比之前远为严密的基础. 他的很多定义和论述已经相当接近微积分的现代形式了. 不过人们很快又发现柯西的理论实际上也存在一些问题. 例如，他用到许多“无限趋近”、“想要多小就有多小”等直觉描述的语言. 他的极限定义，就是用语言陈述的，而不是用数学符号表述的. 另外，他没有正确区分连续和一致连续、收敛和一致收敛以及连续性和可微性之间的差别.

用反常积分可以将柯西的积分定义，扩展到$[a,b]$上具有有限多个不连续点的函数上. 但是分析中还有很多具有无限多个不连续点的函数，例如狄利克雷函数. 那么，如何对$[a,b]$上具有无限多个不连续点的函数定义积分呢？

1854 年，在黎曼(见图 4.6)为取得讲师资格而撰写的论文“关于用三角级数表示函数的可能性”中，分三步对$[a,b]$上的有界函数定义了积分，并给出了几何图解.

图 4.6　黎曼

第一步：划分区间

任意$n-1$个点$a<x_1<x_2<\cdots<x_{n-1}<b$将区间$[a,b]$划分为$n$个子区间，每个子区间的长度为$\delta_1=x_1-a$，$\delta_2=x_2-x_1,\cdots$，$\delta_n=b-x_{n-1}$. 令$\varepsilon_1,\varepsilon_2,\cdots,\varepsilon_n$为 0 和 1 之间的数. 对每个$\varepsilon_k$，数$x_{k-1}+\varepsilon_k x_k$落在区间$[x_{k-1},x_k]$中.

第二步：求和

$$S=\delta_1 f(a+\varepsilon_1\delta_1)+\delta_2 f(x_1+\varepsilon_2\delta_2)+\cdots+\delta_n f(x_{n-1}+\varepsilon_n\delta_n)$$

第三步：取极限

无论怎样选择 ε_k 和 δ_k，当 δ_k 趋近无穷小时，S 的值无限接近一个固定值 A，称这个固定值 A 为 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$，否则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 没有意义.

有了积分的定义后，黎曼又考虑了一个函数在什么情况下可以积分，在什么情况下不能积分？他给出了两个可积性条件：

(1) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积；

(2) 若 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上有界，且只有有限多个间断点，则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积.

根据黎曼给出的可积性条件可知，狄利克雷函数是黎曼不可积的.

黎曼的积分定义与柯西的不同之处在于：

(1) 在第二步求和时，柯西取函数 $f(x)$ 在子区间左端点处的值，而黎曼函数 $f(x)$ 在子区间内的任意点处取值；

(2) 柯西积分定义中的函数是连续函数，黎曼定义的是有界函数.

德国数学家魏尔斯特拉斯(见图 4.7)在柯西工作的基础上为分析学奠定了严格的基础，他重新给出了极限、一致连续、一致收敛等微积分中的基本概念.

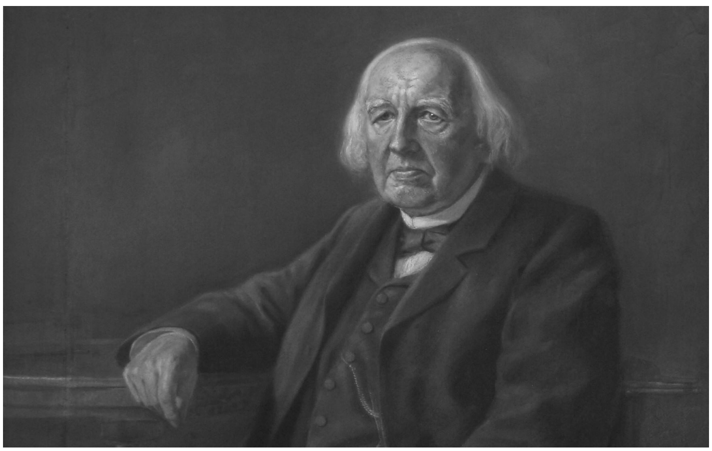


图 4.7　魏尔斯特拉斯

极限: $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得当 $0<|x-a|<\delta$，有 $|f(x)-L|<\varepsilon$.

与柯西的极限定义相比，这是一个纯粹的分析定义.

一致连续: 如果对 $\forall\varepsilon>0$, $\exists\delta>0$, 使得对 $f(x)$ 的定义域内的任意两点 x 和 y，当 $|x-y|<\delta$ 时，有 $|f(x)-f(y)|<\varepsilon$，则称 $f(x)$ 在其定义域内是一致连续的.

柯西在某些证明中实际上已经用到了一致连续，但是遗憾的是他没有给出一致连续的定义，也没有对两种连续加以区分.

点态收敛: 设函数列 $\{f_k(x)\}$ 具有相同的定义域. 如果 $\{f_k(x)\}$ 收敛于 $f(x)$，即 $\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)=f(x)$，则称 $f(x)$ 为 $\{f_k(x)\}$ 的点态极限.

如果 $\{f_k(x)\}$ 中的每个函数具有某种性质，那么点态极限 $f(x)$ 是否也具有这种性质呢？换句话说，如果每个 $f_k(x)$ 连续，那么 $f(x)$ 一定连续吗？如果每个 $f_k(x)$ 可积，那么 $f(x)$ 一定可积吗？例如，定义在 $[0,\pi]$ 上的函数列

$$f_k(x)=(\sin x)^k$$

的点态极限为

$$f(x)=\begin{cases} 0, & 0\leqslant x<\dfrac{\pi}{2} \\ 1, & x=\dfrac{\pi}{2} \\ 0, & \dfrac{\pi}{2}<x\leqslant\pi \end{cases}$$

虽然每个函数 $f_k(x)$ 连续，但是点态极限 $f(x)$ 在 $x=\dfrac{\pi}{2}$ 处不连续. 为此，魏尔斯特拉斯提出了一种解决方法，引进了一种更强的收敛方式.

一致收敛: 设函数列 $\{f_k(x)\}$ 具有相同的定义域. 对于 $\forall\varepsilon>0$, $\exists N$, 当 $k\geqslant N$ 时, x 为定义域中的任意一点, 有 $|f_k(x)-f(x)|<\varepsilon$, 则称 $\{f_k(x)\}$ 一致收敛于 $f(x)$.

有了一致收敛的定义后，魏尔斯特拉斯证明了关于一致收敛的四个定理.

定理 1：如果$\{f_k(x)\}$是$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$的连续函数列，则$f(x)$也是连续函数.

定理 2：如果$\{f_k(x)\}$是$[a,b]$上一致收敛于$f(x)$的有界黎曼可积函数列，则$f(x)$在$[a,b]$上也是黎曼可积的，且$\int_a^b \left(\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)\right) \mathrm{d}x = \lim\limits_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.

定理 3：如果$f(x)$是定义在$[a,b]$上的连续函数，则存在$[a,b]$上一个一致收敛于$f(x)$的多项式序列$\{P_k\}$.

定理 4：设$\{f_k(x)\}$是定义在相同定义域上的函数列. 如果对每个k，存在一个正数M_k，使得对定义域内的所有x，有$|f_k(x)| \leqslant M_k$，且无穷级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} M_k$收敛，则函数项级数$\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(x)$是一致收敛的.

连续性和可微性是两种重要的函数性质，它们之间有什么关系呢？可微函数一定是连续函数，反之，连续函数一定可微吗？我们知道函数$y=|x|$处处连续，但是在$x=0$处是不可微的. 不过，在 19 世纪的前半期，微积分教科书中都认为连续函数一定是可微的.

1861 年，魏尔斯特拉斯构造了一个处处连续但处处不可微的例子. 但是直到 1872 年 7 月 18 日，他才把这个例子交给了柏林科学院. 这个例子是

如果a是奇数，$b\in(0,1)$是常数，且满足$ab>1+\frac{3\pi}{2}$，那么

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} b^k \cos(a^k x\pi)$$

是处处连续但处处不可微的.

魏尔斯特拉斯构造的这个极度病态的函数使当时的数学界大为震惊，也遭到了一些大数学家的反对，如庞加莱认为魏尔斯特拉斯的病态函数是“一种对常识的蹂躏”.

柯西的工作极大地推动了分析学的严格化，而魏尔斯特拉斯引入ε-δ语言使得分析严格化达到了顶峰，因此，他被称为“现代分析学之父”. 那么，在

柯西、黎曼和魏尔斯特拉斯之后，分析学中还有需要解决的难题吗？

回答是肯定的. 直到 19 世纪 80 年代，分析学仍承受病态函数反例的巨大冲击. 例如下面的病态函数：

(a) 狄利克雷函数是处处不连续，且黎曼不可积的.

(b) 1875 年，托梅(Carl Johannes Thomae，1840—1921)给出 $(0,1)$ 上的函数 $r(x)$ 扩充的直尺函数 $R(x)$，它在每个无理点处连续，而在每个有理点处不连续，但它是黎曼可积的，且 $\int_0^1 R(x)\,\mathrm{d}x = 0$.

(c) 魏尔斯特拉斯的病态函数是处处连续但处处不可微的函数.

(d) 1881 年，沃尔泰拉在他的论文“论积分学原理”中给出了一个病态函数，这个函数表明黎曼积分存在漏洞. 对它而言，微积分的基本定理是不成立的.

上面的病态函数提出这样一些问题：

(1) 一个黎曼可积函数可能不连续，但它的不连续性应该是有限度的. 换句话说，一个黎曼可积函数的不连续性可以达到什么样的程度?

(2) 如何来弥补黎曼积分的缺陷呢？

对这些问题的解答，历史把它们交给了年轻的勒贝格(见图 4.8). 1902 年，勒贝格在他的博士学位论文“积分、长度与面积”中第一次阐述了他有关测度和积分的思想. 论文中他首先定义了零测度集.

图 4.8　勒贝格

如果一个集合能够包含在有限多个或可数多个区间内，而这些区间的总长度可以要多小有多小，则他称这个集合是零测度集.

这个定义虽然不是他首创的，但是与前人完全不同的是，他指出可以用可数多个区间来覆盖集合，而不仅仅是有限多个区间. 有了这个定义后，他回答了前面的问题，即一个有界函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上黎曼可积的充分必要条件是它的不连续点的集合是零测度集.

接下来，勒贝格对一个更大的集合族定义了测度.

如果一个集合 E 的内测度 $m_i(E)$ 和外测度 $m_e(E)$ 相等，则称集合 E 是可测的.

因此，任何区间、开集、闭集、零测度集、有理数集以及无理数集都是可测集.

有了可测集的定义后，勒贝格定义了可测函数并给出了几何图解. 一个有界或无界的函数 $f(x)$，如果对任何 $\alpha<\beta$，集合 $\{x|\alpha<f(x)<\beta\}$ 是可测的，则称 $f(x)$ 是可测函数. 由可测函数的定义可知，狄利克雷函数是可测函数. 他还证明了两个可测函数的和与积都是可测函数，可测函数列的点态极限也是可测函数. 可测函数是一个庞大的函数族. 甚至可以说，在勒贝格之前数学家考察过的所有函数都是可测函数.

将函数的定义域划分为细小的子区间后，在这些子区间上构建矩形，矩形的高是函数值，最后令最大子区间的宽趋于零，这时所有矩形的面积和的极限就是函数 $f(x)$ 的黎曼积分. 勒贝格通过划分被积函数的值域而定义了勒贝格积分.

勒贝格利用零售商汇总营业收入的例子，形象地说明了这两种积分之间的不同. 零售商在汇总一天的营业收入时，他可以按照到手的现金和账单的顺序来计算，如依次将 1 美分、10 美分、25 美分等累加起来就是一天的营业收入. 这种方法就是黎曼积分的建立过程，从左到右走遍区间 $[a,b]$ 时获取遇到点处的函数值. 它是由定义域中的值来“确定的”，而不考虑值域. 不过还有一种汇总营业收入的方法. 店主在结账时可以不用考虑收到每笔款项的顺序，而是考虑收到款项的面值. 例如，他共收到 12 笔的 10 美分、30 笔的 25 美分，50 笔的 1 美分，等等. 用每种币值的数量乘以币值，再进行求和就可以计算出一天的收入. 这

正是勒贝格积分的建立过程，它是由值域中的函数值来“确定的”，而与定义域无关.

勒贝格指出如果商业经营中涉及的量是有限量，这两种方法产生的结果是一样的. 但如果是无穷多个量，他说道：

“如果求无穷多个极微小的量之和，那么这两种方法之间存在巨大差异.”

勒贝格给出勒贝格积分的定义后，证明了下面几个定理.

定理 1：如果函数 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的有界黎曼可积函数，则 $f(x)$ 也是勒贝格可积的，并且 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 在两种积分下有相同的积分值.

定理 2：如果函数 $f(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的有界可测函数，则它是勒贝格可积的.

定理 3：如果函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的有界可测函数，且几乎处处有 $f(x)=g(x)$，则 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$.

定理 4：如果函数列 $\{f_k(x)\}$ 是区间 $[a,b]$ 上的可测函数列，对所有 $k\geqslant 1$ 和 $\forall x\in[a,b]$，有 $|f_k(x)|\leqslant M$，且 $f(x)=\lim\limits_{k\to\infty} f_k(x)$ 是点态极限，则

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b\left[\lim_{k\to\infty} f_k(x)\right]\mathrm{d}x$$

定理 5：如果函数 $F(x)$ 是区间 $[a,b]$ 上的可微函数，且具有有界的导数 $F'(x)$，则 $\int_a^b F'(x)\,\mathrm{d}x=F(b)-F(a)$.

勒贝格积分是比黎曼积分更一般的一种积分，它保留了黎曼积分的精华. 由黎曼积分的定义可知，狄利克雷函数 $\mathrm{d}(x)$ 是黎曼不可积的. 但是它是有界可测函数，所以根据定理 2，它是勒贝格可积的，且 $\int_0^1 \mathrm{d}(x)\,\mathrm{d}x=0$. 定理 3 表明如果在一个零测度集上改变可测函数的值，则它的勒贝格积分不变. 但是对于黎曼积分，如果在有限多个点上改变函数的值，则积分值不变；如果在无穷多个点上改变函数的值，那么积分值有可能会变. 因此，相比之下，勒贝格积分更具备抗变性，因为在一个测度为零的集合上改变函数值是不影响它的可积性和积分值的.

勒贝格积分理论在刚建立的时候也遭到强烈的反对，如埃尔米特(Charles Hermite，1822—1901)说道：

“我怀着惊恐的心情对不可导函数的令人痛惜的祸害感到厌恶.”

勒贝格在1902年博士学位论文发表后的将近10年时间里，在巴黎都找不到职位，一直到1910年他才在巴黎大学找到了工作. 对于勒贝格积分的建立，勒贝格在他1904年的专著《积分与原函数的研究》中这样写道：

“为了解决已经提出的那些问题而不是出于对复杂事物的偏爱，我在书中引进一个积分定义，这个定义比黎曼积分的定义更加具有普遍性，并且可以把黎曼积分作为一个特例.”

勒贝格积分可以看成是现代分析的开端，它之前的分析被称为经典分析，之后的分析被称为现代分析. 如果没有勒贝格积分，泛函分析的发展进程可能会延缓，不过刚好有这样一个巧合，勒贝格积分及时地出现了.

4.2.2 里斯的相关工作

里斯(见图 4.9)是匈牙利数学家，他的父亲是一名物理学家，弟弟马塞尔(Marcel Riesz，1886—1969)也是数学家. 1902 年，里斯在布达佩斯大学获得博士学位，学位论文是关于几何的. 在20世纪初去德国哥廷根大学学习的浪潮的鼓舞下，里斯在哥廷根大学学习过一段时间，是希尔伯特积分方程工作的追随者之一，更是泛函分析的创始人之一. 1936年，他当选为匈牙利科学院院士. 1946 年起成为布达佩斯大学数学教授. 他还是法国科学院的通讯院士和许多科学协会的会员. 1952 年，他与学生合著的《泛函分析讲义》法文版问世，这部著作先后被译成英文、德文，中译本分两卷分别于1963年、1980年出版.

1907年，借助勒贝格积分这个全新的数学工具，里斯试图将希尔伯特处理积分方程时限制未知函数为连续的条件放宽为勒贝格平方可积. 他考虑对于给定的完备规范正交系，能否确定出函数关于这个完备规范正交系的傅里叶系数？而且还考虑了给定的无穷序列与某一个函数的傅里叶系数之间的关系. 他在勒贝格平方可积函数集合L^2与平方可和序列集合l^2之间建立下面的定理：

图 4.9　里斯

设 $\{\varphi_p\}$ 是定义在区间 $[a,b]$ 上的勒贝格平方可积函数构成的规范正交系，$\{a_p\}$ 是给定的实数序列，则存在一个勒贝格平方可积的函数 $f(x)$，可以将这些实数序列看成是它关于 $\{\varphi_p\}$ 的傅里叶系数，也就是说，

$$\int_a^b f(x)\,\varphi_i(x)\mathrm{d}x = a_i, \qquad i=1,2,\cdots$$

成立的充分必要条件是级数 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2$ 收敛，即 $\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2 < \infty$.

这个定理的充分性可以由贝塞尔不等式来证明，因此只需要证明它的必要性. 里斯首先在特殊情形下证明了这个定理，即 $\{\varphi_p\}$ 是三角函数系，区间 $[a,b]$ 是 $[0,2\pi]$. 他先构造了一个级数 $\sum_{p=1}^{\infty} a_p\varphi_p(x)$，其中 $\varphi_p(x)$ 是形如 $\frac{1}{k\pi}\cos kx$ 或 $\frac{1}{k\pi}\sin kx$ 的函数，$\{a_p\}$ 是给定的实序列. 他接着证明了级数 $\sum_{p=1}^{\infty} a_p\varphi_p(x)$ 一致收敛于一个有界变差的连续函数，这个函数几乎处处可导，定义 $f(x)$ 就是这个函数，可以证明它是勒贝格平方可积的函数，它的傅里叶系数为 $\{a_p\}$. 因此，里斯在三角函数系构成规范正交系的特殊情形下，证明了这个定理的必要性.

接着里斯将这一结果推广到更一般的情形上，这里的规范正交系 $\{\psi_p(x)\}$ 是

由定义在$[0,2\pi]$上的函数构成的. 他先考虑了无穷维线性方程组

$$a_p = \sum_{q=1}^{\infty} x_q b_{pq}, \qquad p = 1, 2, \cdots \tag{4.5}$$

其中$\{a_p\}$是给定的平方可和序列，x_q是未知数，b_{pq}被定义为

$$b_{pq} = \int_0^{2\pi} \varphi_p(x)\,\psi_q(x)\mathrm{d}x \tag{4.6}$$

其中$\{\varphi_p\}$是三角函数系构成的规范正交系. 由无穷维线性方程组的理论可知，如果

$$\sum_{r=1}^{\infty} b_{pr} b_{qr} = \delta_{pq}, \qquad p, q = 1, 2, \cdots$$

则无穷维线性方程组有唯一的平方可和的解$x = (x_1, x_2, \cdots)$，表示为

$$x_q = \sum_{p=1}^{\infty} b_{pq} a_p$$

对于三角函数系构成的规范正交系$\{\varphi_p\}$，里斯指出勒贝格平方可积函数$f(x)$满足

$$x_q = \int_0^{2\pi} f(x)\varphi_q(x)\,\mathrm{d}x \tag{4.7}$$

将式(4.6)和式(4.7)代入式(4.5)中可得

$$a_p = \sum_{q=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} f(x)\varphi_q(x)\,\mathrm{d}x \int_0^{2\pi} \psi_p(x)\varphi_q(x)\,\mathrm{d}x$$

由法图定理，可知

$$a_p = \int_0^{2\pi} f(x)\psi_p(x)\,\mathrm{d}x$$

因此，$\{a_p\}$是函数$f(x)$关于规范正交系$\{\psi_p(x)\}$的第p个傅里叶系数.

一个月后，里斯又发表一篇很短的文章，在这篇文章中，他将已经建立的结果推广到多个变量的函数上，将积分区间推广为任意的可测集. 在勒贝格积分没有建立的情况下，希尔伯特将自己的研究仅限于连续函数上是非常明智的.

借助勒贝格积分，里斯指出希尔伯特的结果在勒贝格平方可积的条件下也是成立的.

4.2.3　费舍尔的相关工作

同样在 1907 年，德国科伦大学的费舍尔(Ernst Sigismund Fischer，1875—1954)(见图 4.10)发表了一篇只有 3 页的文章. 文章中他对函数列引进了平均收敛的概念.　如果定义在区间$[a,b]$上的函数列$\{f_n(x)\}$满足

$$\lim_{m,n\to\infty}\int_a^b (f_n(x)-f_m(x))^2\,\mathrm{d}x=0$$

则称$\{f_n(x)\}$是平均收敛的. 如果函数列$\{f_n(x)\}$满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b (f(x)-f_n(x))^2\,\mathrm{d}x=0$$

则称$\{f_n(x)\}$平均收敛到$f(x)$，这里的积分是勒贝格积分.

图 4.10　费舍尔

将$[a,b]$上勒贝格平方可积的函数构成的集合记为$L^2[a,b]$，费舍尔证明了$L^2[a,b]$在平均收敛的意义下是完备的，即

如果$L^2[a,b]$中的函数列$\{f_n(x)\}$在平均收敛的意义下是收敛的，则存在$L^2[a,b]$中的一个函数$f(x)$，使得$\{f_n(x)\}$平均收敛于$f(x)$.

费舍尔在证明中先将$F(x)$构造为

$$F(x)=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t$$

它是有界变差函数，且在$[a,b]$上连续. 由勒贝格的定理可知，$F(x)$有右导数，假设$f(x)$就是这个导数，因而$f(x)$是勒贝格可积的，且$F(x)$满足

$$F(x)=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

类似地，定义$G(x)$为

$$G(x)=\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n^2(t)\mathrm{d}t$$

它具有$F(x)$的所有性质. 如果$g(x)$是$G(x)$的右导数，则$f(x)=g^2(x)$且$f(x)$是属于$L^2[a,b]$的，即

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n^2(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t$$

费舍尔从而证明了$L^2[a,b]$是完备的.

令$\{\varphi_n\}$是一个完备规范正交系，$\{a_n\}$是一个平方可和序列. 则级数$\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n(x)$是平均收敛的，因为当$t>w$时，

$$\begin{aligned}
&\int_a^b\left(\sum_{n=1}^{t}a_n\varphi_n(x)-\sum_{n=1}^{w}a_n\varphi_n(x)\right)^2\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b\left(\sum_{n=w+1}^{t}a_n\varphi_n(x)\right)^2\mathrm{d}x\\
&=\int_a^b\left(\sum_{n=w+1}^{t}a_n^2\varphi_n^2(x)+2\sum_{\substack{k,n=w+1\\k\neq n}}^{w}a_na_k\varphi_n(x)\varphi_k(x)\right)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{n=w+1}^{t}\int_a^b a_n^2\varphi_n^2(x)\mathrm{d}x\\
&=\sum_{n=w+1}^{t}a_n^2
\end{aligned}$$

当 $t, w \to \infty$ 时，由于 $\{a_n\}$ 是平方可和的序列，所以 $\sum\limits_{n=w+1}^{t} a_n^2$ 是趋于零的. 因此，由费舍尔的定理可知，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n \varphi_n(x)$ 平均收敛于 $L^2[a,b]$ 中的函数 $\varphi(x)$，且 $\varphi(x)$ 的傅里叶系数为

$$\int_a^b \varphi_n(x)\varphi(x)\mathrm{d}x = \int_a^b \varphi_n(x)\sum_{p=1}^{\infty} a_p \varphi_p(x)\mathrm{d}x = a_n$$

这样从费舍尔的结果能够推出里斯的结果.

由于里斯和费舍尔各自独立的贡献，这个定理被命名为里斯-费舍尔定理. 它的建立成为勒贝格积分理论的一个完全未预料到的重要应用. 除勒贝格本人外，里斯和费舍尔又一次证明了勒贝格积分是非常有效的新工具. 在函数空间理论的发展中，L^2 空间与 l^2 空间是希尔伯特空间的两种具体表现形式. 里斯-费舍尔定理的建立，为后来给出抽象希尔伯特空间的定义奠定了先决条件.

1907 年，里斯在同一个期刊上还发表了一篇只有 4 页长的文章. 在这篇文章中他指出可以在勒贝格平方可积的函数集合 $L^2[a,b]$ 上定义一种距离，用这种距离可以建立这个函数空间上的一种几何. 同时他也对空间 $L^2[a,b]$ 上的任意有界线性泛函 U，得到这样的表示

$$U(f) = (f, g)$$

1935 年，他将这一表示推广到抽象希尔伯特空间上，最终成为泛函分析中著名的里斯表示定理.

1907 年，弗雷歇（见图 4.11）也注意到在勒贝格平方可积函数空间 $L^2[a,b]$ 中，存在一种类似于希尔伯特序列空间的几何. 他定义 $L^2[a,b]$ 中任意两个平方可积的函数 $f(x)$ 和 $g(x)$ 之间的距离为

$$\sqrt{\int_a^b (f(x)-g(x))^2\,\mathrm{d}x}$$

在这篇文章中，他也指出对定义在 $L^2[a,b]$ 上的每个有界线性泛函 U，存在 $L^2[a,b]$ 中唯一的 $u(x)$，使得对 $L^2[a,b]$ 中的每个 $f(x)$ 有

$$U(f) = \int_a^b f(x)u(x)\mathrm{d}x$$

图 4.11 弗雷歇

希尔伯特空间的思想起源于希尔伯特的积分方程工作，是泛函分析中较早也较简单的研究对象. l^2 空间和 L^2 空间是两个典型的具体希尔伯特空间的例子. 它们在结构上接近 n 维欧氏空间，具有许多与 n 维欧氏空间类似的几何性质，可以说它们是有限维向量空间向无穷维向量空间的推广.

在函数空间的讨论中，通过改变积分的定义和收敛的概念，可以扩充所讨论的函数集合的范围，从而进一步研究这一问题. 施密特、里斯以及费舍尔正是采用了这样的思路. 这两个具体希尔伯特空间的建立为后来巴拿赫空间的建立提供了样板. 里斯仿照 L^2 空间和 l^2 空间发现了具体的巴拿赫空间，即 L^p 空间和 l^p 空间(见第 5 章).

第 5 章　抽象巴拿赫空间理论的开始

里斯仿照 L^2 空间和 l^2 空间，发现 L^p 空间和 l^p 空间（$1<p<+\infty$，$p\neq 2$）是两个典型的巴拿赫空间. 他定义了 L^p 空间上的有界线性算子，成为抽象算子理论的开端. 随后，他对连续函数空间引入了范数，给出了范数满足的三条公理，在连续函数空间上建立了他的紧算子理论. 1922 年，巴拿赫将里斯引入的范数公理推广到一般元素上，给出了抽象巴拿赫空间的定义，进而建立了抽象巴拿赫空间理论.

5.1　具体巴拿赫空间的发现

1907 年，里斯和费舍尔各自独立地建立了里斯–费舍尔定理，开启了数学家对一般赋范空间理论的研究. 1910 年，里斯在《数学年刊》（*Mathematische Annalen*）上发表了一篇论文，题目为“可积函数系的研究”（见图 5.1）.

里斯在文章引言的开头写道：

“这篇文章的中心问题是讨论形如 $\int_a^b f(x)\xi(x)\mathrm{d}x=c$ 的泛函方程构成的方程组的可解性问题，其中 $f(x)$ 是未知函数.”

论文的第一章是关于勒贝格积分的. 在第二章，他给出了赫尔德不等式

$$\sum_{i=1}^{n}|a_i b_i| \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n}|a_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{i=1}^{n}|b_i|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

或

$$\left|\int_M f(x)g(x)\mathrm{d}x\right| \leqslant \left(\int_M |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_M |g(x)|^q\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

和闵科夫斯基不等式

$$\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_i+b_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\sum_{i=1}^{n}\left|a_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\sum_{i=1}^{n}\left|b_i\right|^p\right)^{\frac{1}{p}}$$

或

$$\left(\int_M\left|f(x)+g(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}\leqslant\left(\int_M\left|f(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}+\left(\int_M\left|g(x)\right|^p\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

其中 M 是积分区域，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$. 勒贝格积分和这些不等式是他完成这一工作的重要工具.

Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen.

Von

Friedrich Riesz in Budapest.

Inhaltsverzeichnis.

Einleitung.

Im Mittelpunkte der vorliegenden Untersuchungen steht die Frage nach der Auflösbarkeit eines Systems von Funktionalgleichungen der Form

$$\int_a^b f(x)\,\xi(x)\,dx=c$$

nach der unbekannten Funktion $\xi(x)$. Es haben schon manche, unter andern besonders Stieltjes, derartige Systeme untersucht. Jedoch die

图 5.1 “可积函数系的研究”一文的首页

在论文的第三章，里斯仿照 L^2 空间发现了 L^p 空间. 对此，他在文章中写道：

“这篇文章中我们用 $|f(x)|^p$ 的可积性来代替平方可积的假设条件……对每个 $p>1$，用函数类 L^p 和 $L^{\frac{p}{p-1}}$ 来代替函数类 L^2 的地位……对这些函数类的研究会使 $p=2$ 的优势清楚地显现出来，而且我们也可以断言该研究会对这些函数空间的公理化研究提供有用的材料.”

里斯在这一章给出了论文中的第一个定理：

如果对 L^p 中的每个函数 $f(x)$，函数 $h(x)$ 都使得 $f(x)h(x)$ 可积，则 $h(x)$ 属于 L^q. 反过来，一个 L^p 中的函数 $f(x)$ 和 L^q 中的函数 $h(x)$ 的乘积是可积的.

他在定理证明中指出 $h(x)$ 必须可积（取 $f(x)\equiv 1$）. 如果 $|h(x)|^q$ 不可积，则存在 L^p 中的一个 $g(x)$，使得 $g(x)h(x)$ 不可积.

在论文的第六章，里斯对 L^p 空间引入了强收敛和弱收敛的概念. 这些概念的引入对于后面将他的理论推广到巴拿赫空间中非常重要. 如果 L^p 空间中的函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^p \,\mathrm{d}x=0$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 强收敛于 L^p 空间中的函数 $f(x)$. 如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 满足

（1）对每个 n，有

$$\int_a^b |f_n(x)|^p \,\mathrm{d}x<M$$

（2）对 $[a,b]$ 中的每个 x，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^x f_n(t)\mathrm{d}t=\int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

则称 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛于 $f(x)$.

如果 $\{f_n(x)\}$ 强收敛于 $f(x)$，则对 L^q 中的所有 $g(x)$，都有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)g(x)\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)g(x)\mathrm{d}x \tag{5.1}$$

成立，而且

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b\left|f_n(x)\right|^p\mathrm{d}x=\int_a^b\left|f(x)\right|^p\mathrm{d}x \tag{5.2}$$

由式(5.2)可以推出弱收敛定义中的有界性条件(1)成立. 再取 $g(x)\equiv 1$，式(5.1)就是条件(2). 因此，如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 强收敛，则它也是弱收敛的，且强收敛和弱收敛的极限函数相等. 同时，里斯也指出弱收敛序列不一定强收敛. 例如，函数列 $\left\{\cos nx\middle|n=1,2,\cdots\right\}$ 弱收敛于零，因为

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\cos nt\mathrm{d}t=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sin nx=0$$

但是它不是强收敛的.

里斯接下来证明，如果函数列 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛，则对 L^q 空间中的每个 $g(x)$，有

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b(f(x)-f_n(x))g(x)\mathrm{d}x=0 \tag{5.3}$$

成立. 他指出如果 $\{f_n(x)\}\subset L^p$，$f(x)\in L^p$，使得对 L^q 空间中的每个 $g(x)$，式(5.3)成立，则 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛于 $f(x)$.

在论文的第七章，里斯指出 L^p 空间中的有界球是弱紧的，这是希尔伯特“选择原理”的推广. 他证明了这样一个定理：

如果对每个属于 L^p 空间中的无穷子集 S 的函数 $f(x)$，有

$$\int_a^b\left|f(x)\right|^p\mathrm{d}x\leqslant G^p \tag{5.4}$$

其中 G 是只与集合 S 有关的常数，则集合 S 中存在弱收敛的序列.

证明 对 S 中的每个 $f(x)$，定义

$$F(x)=\int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

记 $F(x)$ 构成的集合为 A，具有下面的性质:

(1) 由式(5.4)可知 A 是有界的;

(2) 对 A 中所有的 $F(x)$，有

$$\left|F_1(x)-F_2(x)\right|=\left|\int_a^{x_1}f(x)\mathrm{d}x-\int_a^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|=\left|\int_{x_1}^{x_2}f(x)\mathrm{d}x\right|\leqslant\left|x_1-x_2\right|^{qG}$$

因此，由阿尔泽拉定理可知，集合 A 中存在一致收敛子列 $\{F_n\}$，即 $F_n\to F^*$.

里斯指出对 L^p 空间中的某个 f^*，有

$$F^*(x)=\int_a^x f^*(x)\mathrm{d}x$$

由于

$$F_n(x)=\int_a^x f_n(x)\mathrm{d}x$$

所以由函数列弱收敛的定义可知，S 中的函数列 $\{f_n(x)\}$ 弱收敛于 $f^*(x)$.

接下来，里斯将里斯–费舍尔定理从 L^2 空间扩展到了 L^p 空间上. 他指出如果 L^p 空间中的函数列 $\{f_n(x)\}$ 是强柯西序列，则存在 L^p 空间中的函数 $f(x)$，使得 $\{f_n(x)\}$ 强收敛于 $f(x)$.

在论文的第八章，里斯讨论求解方程组

$$\int_a^b f(x)g_i(x)\mathrm{d}x=c_i,\qquad i=1,2,\cdots$$

的矩量问题，其中 $g_i(x)$ 是 L^q 空间中的函数，$f(x)$ 是 L^p 空间中的未知函数. 矩量问题是指确定一个函数 $f(x)$，使它关于给定的规范正交系 $\{\varphi_n\}$ 具有傅里叶系数 $\{a_n\}$，或者说，确定一个函数 $f(x)$，使得

$$\int_a^b f(x)\varphi_n(x)\mathrm{d}x=a_n,\qquad n=1,2,\cdots$$

成立. 由里斯–费舍尔定理可知，里斯问题可以看成是施密特在 l^2 空间中处理无穷维线性方程组问题的推广. 他给出这个线性方程组可解的充分必要条件是存在一个常数 M，对每个 n 及每个实函数或复函数 $u_1,u_2,\cdots,u_n$ 的任意有限集，不等式

$$\left|\sum_{i=1}^n u_i c_i\right|^q\leqslant M^q\int_a^b\left|\sum_{i=1}^n u_i g_i(x)\right|^q\mathrm{d}x$$

成立. 里斯运用这个条件给出了这样一个定理：

令 $A(f)$ 是定义在 L^p 空间上的实或复线性泛函，对 L^p 空间中任意的 f_1 和 f_2 以及任意数 a_1 和 a_2 满足:

（1） $A(a_1 f_1 + a_2 f_2) = a_1 A(f_1) + a_2 A(f_2)$；

（2）存在一个常数 M，有

$$\left|A(f)\right| \leqslant M\left(\int_a^b \left|f(x)\right|^p \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$$

则存在 L^q 空间中的一个函数 $\alpha(x)$，使得对 L^p 空间中的所有 $f(x)$，都有

$$A(f) = \int_a^b \alpha(x) f(x) \mathrm{d}x$$

这个定理被称为表示定理.

1907 年，里斯得到了 L^2 空间上的泛函表示（见本书 4.2.2 节）. 1909 年，里斯又在泛函表示方面做出了重要贡献，他将 $C[a,b]$ 上的有界线性泛函 U，用斯蒂尔切斯积分表示为

$$U(f) = \int_a^b f(x) \mathrm{d}u(x)$$

其中 $u(x)$ 是 $[a,b]$ 上的有界变差函数. 里斯认识到这里的问题与希尔伯特空间中的问题不同，$u(x)$ 和 $f(x)$ 取自不同的空间，由于 $u(x)$ 可能具有不连续点，所以不能再将泛函与 $C[a,b]$ 空间中的元素联系起来.

里斯 1910 年的这篇论文“可积函数系的研究”中的表示定理，其实是将 L^2 空间和连续函数空间 $C[a,b]$ 中的结果推广到了 L^p 空间中. 对偶空间，即有界线性泛函构成的空间，也最早出现在这篇文章中. 用现代术语表述这个定理，就是 L^p 空间的对偶空间是 L^q 空间.

1913 年，里斯在其《无穷维线性方程组》一书中以一种完全不同的方法阐述了希尔伯特的结果，同时他在假设无穷维方程组的解是 p 次可和的情况下研究了方程组的解，从而发现了与函数空间 L^p 相对应的 p 次可和的无穷序列空间，即 l^p 空间.

与 L^2 空间和 l^2 空间不同，L^p 空间和 l^p 空间（$1 < p < +\infty, p \neq 2$）不再是希尔伯特空间，而是巴拿赫空间的两个典型例子. 它们的发现使人们看到比希尔伯特空间更一般的函数空间.

5.2　抽象算子理论的开端

泛函分析中的核心部分是研究出现在微分方程和积分方程中的算子的抽象理论. 算子理论统一了微分方程和积分方程的特征值理论，以及作用在无穷维空间中的线性变换.

在“可积函数系的研究”一文的第十二章，里斯给出了 L^p 空间中有界线性算子的定义. 如果从 L^p 空间到 L^p 空间的一个线性变换满足下面条件：

(1) T 是一个“分布”，即

$$T(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 T(f_1) + c_2 T(f_2)$$

(2) T 有界，即存在一个常数 M，使得对满足

$$\int_a^b |f(x)|^p \, \mathrm{d}x \leqslant 1$$

的 $f \in L^p$ 都有

$$\int_a^b |T(f(x))|^p \, \mathrm{d}x \leqslant M^p$$

则他称 $T(f(x))$ 为“泛函变换”，这正是现在有界线性算子的定义.

有了对偶空间便可以引入伴随算子的概念. 里斯接下来指出对 L^q 空间中的任意函数 $g(x)$，积分

$$\int_a^b T(f(x)) g(x) \mathrm{d}x$$

可以定义 L^p 空间上的一个关于 $f(x)$ 的线性泛函. 根据前面的表示定理可知，存在着 L^q 中唯一的一个函数 $\varphi(x)$，使得

$$\int_a^b T(f(x)) g(x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) \varphi(x) \mathrm{d}x \tag{5.5}$$

如果将有界线性算子 T 的伴随算子记为 T^*，则 $T^*(g) = \varphi$，这样式 (5.5) 可以写成

$$\int_a^b T(f(x)) g(x) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) T^*(g(x)) \mathrm{d}x$$

如果用现代术语表述，则是 T^* 满足 $(Tf, g) = (f, T^*g)$ ． T^* 也满足里斯定义有界线性算子的条件(1)和(2)，因此，它是 L^q 上的有界线性算子.

在“可积函数系的研究”一文的第十三章，里斯考虑了方程

$$T(\varphi(x)) = f(x) \tag{5.6}$$

的可解性，其中 T 是 L^p 上的一个线性变换， f 是已知函数， φ 是 L^p 中的未知函数. 他指出方程(5.6)有解的充分必要条件是对 L^q 中所有的 g ，方程

$$\int_a^b \varphi(x) T^*(g(x)) \mathrm{d}x = \int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x$$

都有解. 因此得到方程(5.6)有解的充分必要条件是，对 L^p 空间中的所有 $f(x)$ 和 L^q 空间中所有的 $g(x)$ ，有

$$\left|\int_a^b f(x) g(x) \mathrm{d}x\right| \leqslant M\left(\int_a^b \left|T^*\left(g(x)\right)\right|^q \mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{q}}$$

接着里斯研究了 T 的逆的存在性. 如果

$$TT^{-1} = T^{-1}T = E$$

其中 E 为恒等变换，则称 T^{-1} 为 T 的逆. 如果 T^{-1} 存在，方程(5.6)的解可以表示为

$$\varphi(x) = T^{-1}(f(x))$$

里斯指出 T 的逆和 T^* 的逆同时存在，他也给出了 T 的逆存在的充分必要条件是，存在一个常数 M ，使得对 L^p 空间中的所有 $f(x)$ 和 L^q 空间中所有的 $g(x)$ ，有

$$\int_a^b |f(x)|^p \mathrm{d}x \leqslant M^p \int_a^b |T(f(x))|^p \mathrm{d}x$$

和

$$\int_a^b |g(x)|^q \mathrm{d}x \leqslant M^q \int_a^b \left|T^*\left(g(x)\right)\right|^q \mathrm{d}x$$

成立.

在“可积函数系的研究”一文的第十四章，里斯把积分方程

$$\varphi(x)-\lambda\int_a^b K(x,t)\,\varphi(t)\mathrm{d}t=f(x) \tag{5.7}$$

推广到 L^p 空间中的函数上. 表达式

$$\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$$

可看成作用在函数 $\varphi(t)$ 上的变换，从而将积分方程(5.7)转化为算子方程

$$\varphi(x)-\lambda K(\varphi(x))=f(x)$$

其中已知函数 f 和未知函数 φ 都是 L^p 空间中的函数，K 是 L^p 上的有界线性算子，λ 是参数.

里斯也对 L^2 中的线性算子定义了全连续的概念. 如果 K 将每个弱收敛的序列映射成一个强收敛的序列，则称 K 是全连续的. 此外他还指出他的全连续的定义与希尔伯特给出的定义是等价的. 在序列空间 l^2 中，如果序列 $\{x^t\}$ 满足 $\lim\limits_{t\to\infty}(x^t,x^t)=0$，则称它强收敛于零. 如果 $\{x^t\}$ 对每个 y，有 $\lim\limits_{t\to\infty}(x^t,y)=0$，则称它弱收敛. 显然，这等价于 $(a_1+\varepsilon_1,a_2+\varepsilon_2,\cdots)$ 弱收敛于 $(a_1,a_2,\cdots)$，而且条件 $\lim\limits_{t\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(\varepsilon_i^t)^2=0$ 等价于 $\{\varepsilon^t\}$ 强收敛于零. 如果用公式

$$\sum_{q=1}^{\infty}k_{pq}x_q=y_p,\qquad p=1,2,\cdots$$

将双线性形式看成线性算子 $Kx=y$，则希尔伯特的全连续定义表明算子 K 将弱收敛序列映射为强收敛序列.

里斯将希尔伯特在积分方程研究中得到的有关连续函数的结果推广到了 L^2 空间中. 他指出 K 的特征值没有有限的聚点，而且对应于不同特征值的特征函数相互正交. 在其论文“可积函数系的研究”中，他也指出对于对称全连续算子 $Kf(x)$，希尔伯特的分解定理是成立的，即

$$K(f(x))=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_i}K_i(f(x))$$

其中右边的和式取遍所有的特征值 λ_i.

里斯发表于 1910 年的这篇文章(即论文“可积函数系的研究”)在泛函分析中的地位仅次于希尔伯特发表于 1906 年的文章，其重要性可概括为以下几点：

(1) 发现了 L^p 空间，它不是希尔伯特空间，而是巴拿赫空间的典型例子. 它的发现使人们看到了比希尔伯特空间更一般的函数空间.

(2) 给出了有界线性算子的抽象定义. 将积分方程中的表达式 $\int_a^b K(s,t)\varphi(t)\mathrm{d}t$ 看成作用在函数 $\varphi(t)$ 上的算子，从算子理论的角度来处理积分方程. 因此，里斯的这一工作是抽象算子理论的良好开端.

(3) 虽然里斯在文章中没有提到“对偶”或“对偶空间”，但是他已经给出了对偶空间的一些重要因素.

5.3 紧算子理论的建立

1918 年，里斯把 1916 年用匈牙利语写成的文章翻译成德文后发表出来，这篇文章的题目为“线性泛函方程”(见图 5.2)，共有三章，分别为

第一章：定义和引理

第二章：线性变换的逆

第三章：积分方程上的应用

在论文“线性泛函方程”的第一章，里斯考虑了区间 $[a,b]$ 上的全体连续函数 $f(x)$ 做成的集合. 取 $|f(x)|$ 的最大值为 $f(x)$ 的范数，记为 $\|f\|$. 紧接着，他给出这一范数满足的三条公理(见图 5.3)：

(1) $\|f\| \geqslant 0$，且 $\|f\| = 0$ 当且仅当 $f(x) \equiv 0$；

(2) $\|cf(x)\| = |c|\|f(x)\|$；

(3) $\|f_1 + f_2\| \leqslant \|f_1\| + \|f_2\|$.

里斯指出全体连续函数在这个范数意义下构成一个函数空间，由此，他开始用范数代替内积并用公理化来研究函数空间. 这是函数空间理论的发展中非常关键的一步. 公理化方法的使用对 20 世纪数学的发展具有重要意义. 对此，外尔曾说过：

“20 世纪数学的一个十分突出的方面是公理化方法所起的作用极度增长，以前公理化方法仅仅用来阐述我们所建立的理论的基础，而现在它却成为具体数学研究的工具.”

ÜBER LINEARE FUNKTIONALGLEICHUNGEN.

Von

FRIEDRICH RIESZ

in Kolozsvár.

Die vorliegende Arbeit behandelt das Umkehrproblem für eine gewisse Klasse von linearen Transformationen stetiger Funktionen, nebst Anwendung auf die Fredholm'sche Integralgleichung. Dabei kommt es uns weniger auf neue Resultate an, als auf die Erprobung einer äusserst elementaren Methode. Zu Grunde gelegt werden einige in § 1. entwickelte Sätze über lineare Funktionalmannigfaltigkeiten, die fast unmittelbar aus der Definition der gleichmässigen Konvergenz fliessen. Die wesentlichsten Beweise sind eine Art von Endlichkeitsbeweisen, indem nämlich gezeigt wird, dass gewisse Prozesse sich nicht ins Unendliche fortsetzen lassen, sondern notwendig abbrechen. Der wichtigste Begriff, der hiebei zur Verwendung kommt, ist der von Herrn Fréchet in die allgemeine Mengenlehre eingeführte Begriff der kompakten Menge (hier spezieller kompakte Folge), der sich in verschiedenen Zweigen der Analysis ganz besonders bewährt hat. Dieser Begriff gestattet eine besonders einfache und glückliche Formulierung der Definition der vollstetigen Transformation, die im wesentlichen einer ähnlichen Begriffsbildung von Herrn Hilbert für Funktionen von unendlich vielen Veränderlichen nachgebildet ist.

Die in der Arbeit gemachte Einschränkung auf stetige Funktionen ist nicht von Belang. Der in den neueren Untersuchungen über diverse Funktionalräume bewanderte Leser wird die allgemeinere Verwendbarkeit der Methode sofort erkennen; er wird auch bemerken, dass gewisse unter diesen, so die Gesamtheit der quadratisch integrierbaren Funktionen und der Hilbert'sche Raum von unendlich vielen Dimensionen noch Vereinfachungen gestatten, während der hier behandelte scheinbar einfachere Fall als Prüfstein für die allgemeine Verwendbarkeit betrachtet werden darf.

图 5.2　论文“线性泛函方程”的首页

Die zu Grunde gelegte Gesamtheit werden wir der Kürze halber als *Funktionalraum* bezeichnen. Ferner nennen wir *Norm* von $f(x)$ und bezeichnen mit $\|f\|$ den Maximalwert von $|f(x)|$; die Grösse $\|f\|$ ist danach im Allgemeinen positiv und verschwindet nur dann, wenn $f(x)$ identisch verschwindet. Ferner bestehen für sie die Beziehungen

$$\|cf(x)\| = |c|\,\|f(x)\|;\quad \|f_1 + f_2\| \leq \|f_1\| + \|f_2\|.$$

Unter *Distanz* der Funktionen f_1, f_2 verstehen wir die Norm $\|f_1 - f_2\| = \|f_2 - f_1\|$ ihrer Differenz. Danach ist die gleichmässige Konvergenz einer Funktionenfolge

图 5.3　里斯引入的范数①

① 摘自里斯 1918 年的论文“线性泛函方程”的第 72 页.

范数是欧氏空间中向量长度的推广，它与角度概念无关，所以用范数来研究函数空间会失去两个元素正交这一内积空间或希尔伯特空间中的关键概念，因此也就没有了正交投影、正交分解等分析与几何中常用的概念、方法. 但是，用范数定义的空间相比内积空间而言更一般，也就是用范数研究函数空间会大大拓宽泛函分析的研究范围. 而且里斯在文章中指出：

“这篇文章中对连续函数的限制并不是本质. 熟悉有关各类函数空间最新研究的读者会立刻认识到这一方法具有更一般的应用，他们也会注意到这些空间中的某些空间，如平方可积函数空间和平方可和序列空间仍然适用，不过这里所处理的看似比较简单的情形可以看成对这一方法的一般应用的测试.”

由此，可以清楚地看出，里斯已经认识到他的方法所具有的一般性，他的理论对更一般的函数空间就像试金石一样，其结果可以推广到更一般的情形中.

在定义了函数空间后，里斯又定义了函数空间上的线性算子. 如果变换 T 对所有 f 都满足

$$T(cf)=cT(f)$$

和

$$T(f_1+f_2)=T(f_1)+T(f_2)$$

则称 T 是分布. 如果存在一个常数 M 使得对所有 f 都有

$$\|T(f)\|\leqslant M\|f\|$$

则称 T 是有界的. 如果将函数空间中的元素 f 映射成 $T(f)$ 的变换既是分布又是有界的，则里斯称这个变换为线性变换，其实就是有界线性算子.

里斯对连续函数列的一致收敛性进行了详细的讨论，也给出了函数列一致收敛的充分必要条件. 由线性算子的定义可知，线性算子 T 对于函数列 $\{f_n\}$ 有

$$\|T(f)-T(f_n)\|=\|T(f-f_n)\|\leqslant M\|f-f_n\|$$

这样当序列 $\{f_n\}$ 一致收敛时，可以推出 $T(f_n)$ 收敛于 $T(f)$. 里斯称这样的线性算子 T 是连续的.

里斯这篇文章的新颖点在于，他根据弗雷歇在拓扑学研究中提出的紧集概念，重新表述了希尔伯特的全连续概念. 如果一个线性算子能将任意有界集映射成准紧集，则称该算子为全连续算子，通常也称为紧算子. 他在文章引言中写道：

“这篇文章研究连续函数的一类线性变换的逆的问题以及在弗雷德霍姆积分方程上的应用. 在这一研究中用到的最重要的概念是弗雷歇在一般拓扑学研究中引入的紧集概念. 这一概念使得我们能够对全连续变换给出一个非常简单、恰当的定义，而且它从本质上遵循希尔伯特对全连续的定义.”

在论文“线性泛函方程”中，里斯给出了紧算子的几个例子. 最简单的例子是

$$T(f)=f(a)$$

它将每个连续函数 $f(x)$ 映射为一个常函数 $f(a)$. 更一般的例子是

$$T(f)=f(a_1)g_1(x)+\cdots+f(a_m)g_m(x)$$

其中 $a_1,\cdots,a_m$ 是区间 $[a,b]$ 中的点， $g_1(x),\cdots,g_m(x)$ 是给定的连续函数.

接下来，里斯讨论了紧算子的一些特征. 他指出如果线性算子 T_1 和 T_2 中至少有一个是紧算子，则 T_1T_2 是紧算子；如果线性算子 T，T_1 和 T_2 都是紧算子，则 cT 和 T_1+T_2 也是紧算子.

在连续函数空间中，里斯引入了线性闭子空间的重要概念. 如果函数空间 $C[a,b]$ 的子集 E，满足

(1) 如果 f，f_1，f_2 是 E 中的元素，则 cf，f_1+f_2 也是 E 中的元素；

(2) E 中一致收敛的函数列 $\{f_n\}$ 的极限函数 f 也在 E 中.

则称子集 E 是函数空间 $C[a,b]$ 的线性闭子空间.

有了闭子空间这个概念，里斯建立了一个引理：

设 E_0 是连续函数空间 E 的真闭子空间，则存在一个向量 $x\in E$，满足 $\|x\|=1$ 且对所有的 $y\in E_0$，有

$$\|x-y\|\geqslant\frac{1}{2}$$

当把该引理中的连续函数空间替换为一般的赋范空间时仍然成立，这也就是著名的里斯引理. 运用此引理可以证明赋范空间为有限维的充分必要条件是该空间是局部紧的.

在论文“线性泛函方程”的第二章，里斯考虑线性算子$B=E-A$，其中E是恒等算子，A是紧算子. 通过运用里斯引理，他指出线性算子B的核空间是连续函数空间的一个有限维闭子空间，像空间也是连续函数空间的闭子空间. 他也考虑了线性算子B的迭代B^k的核空间N_k和像空间F_k，指出核空间N_k可以形成一个递增序列，即

$$\{0\}=N_0\subseteq N_1\subseteq\cdots\subseteq N_k\subseteq N_{k+1}\subseteq\cdots$$

在这个链里一定存在着一个最小整数k，使得$N_k=N_{k+1}$成立. 像空间F_k可以形成一个递减序列，即

$$E=F_0\supseteq F_1\supseteq\cdots\supseteq F_k\supseteq F_{k+1}\supseteq\cdots$$

在这个链里也一定存在着一个最小整数k使得$F_k=F_{k+1}$成立. 接着里斯表明对于线性算子B，存在正整数k使得函数空间$E=F_k\oplus N_k$.

希尔伯特得到的全连续的无穷二次型只有点谱而没有连续谱. 里斯指出紧算子的特征值至多有可数多个，其对应的特征向量空间是有限维的.

在论文“线性泛函方程”的第三章，里斯定义积分算子

$$K(f)=\int_a^b K(x,y)f(y)\mathrm{d}y$$

首先由积分的定义可知，它是一个有界线性算子. 再根据阿尔泽拉（Cesare Arzelà，1847—1912）有关连续函数列一致收敛的研究成果，里斯得出$K(f)$是紧算子. 这样弗雷德霍姆积分方程

$$\varphi(x)-\int_a^b K(x,y)\varphi(y)\mathrm{d}y=g(x)$$

可以转化为算子方程

$$\varphi-K(\varphi)=g$$

根据前面对线性算子$B=E-A$的谱的研究，里斯得到了弗雷德霍姆的“择一性”：积分方程要么有唯一的非零解，要么对应的齐次方程有有限多个线性无

关解. 因此，里斯从算子理论的角度建立了与 20 世纪初弗雷德霍姆理论相对应的理论，称为里斯-弗雷德霍姆理论. 该理论表明线性代数方程的可解性结果可以推广到含紧算子的算子方程中.

紧算子是一类特殊的有界线性算子，它在积分方程理论和各种数学物理问题的研究中起着核心的作用，它的性质与有限维空间中的矩阵很类似. 虽然里斯是在具体的巴拿赫空间，即在连续函数空间上建立了紧算子理论，但是他的研究方法、引入的范数公理以及他对函数方程一般性解法的成功探索，在抽象函数空间理论和算子理论的历史发展中具有重要意义.

5.4　巴拿赫空间理论的开始

巴拿赫、哈恩(Hans Hahn，1879—1934)、黑利(Eduard Helly，1884—1943)以及维纳(Norbert Wiener，1894－1964)都对巴拿赫空间理论的发展做出了重要贡献. 巴拿赫和维纳认为应该用抽象的方法来研究巴拿赫空间，哈恩和黑利更侧重从“应用”的角度出发来研究巴拿赫空间. 他们的工作在一些方面有许多重叠，而且优先权的问题也很难说清楚.

5.4.1　巴拿赫空间的定义

巴拿赫(见图 5.4)是一个天才数学家，靠自学成才. 他的数学学术生涯中有一段与苏格兰咖啡馆(见图 5.5)有关的传奇故事. 他经常在这个咖啡馆与同事和年轻学者聚会，讨论着各种数学问题. 他们经常把当时的数学思想写在桌面和餐巾上，但是这样很容易被丢弃或擦掉. 后来有人买了笔记本，把它放在咖啡馆，专门记录各种数学想法和数学问题. 这就是著名的苏格兰笔记本，它能在第二次世界大战的战火中得以幸存，多亏了巴拿赫夫人. 如今，这本珍贵的苏格兰笔记本被翻译成了多种语言.

巴拿赫遵循了数学向着抽象化和公理化发展的趋势，将所要处理的问题与抽象的公理以及分析中的应用联系起来，从而在 1922 年的博士学位论文中开始了对赋范空间理论的广泛研究. 他的研究动力来自将积分方程理论一般化. 巴拿赫工作的成功之处在于，他是在完全抽象的环境中建立他的理论的. 在博士论文的引言中，他指出：

“这篇论文的目的是建立一些定理，这些定理在各种情形下都是正确的，这一点我将给出说明. 不过，我不必对每种情形进行单独证明. 我已经有一种不同的方法，即在一般的情形下来考虑满足某些性质的元素的集合. 我也会推导出一些定理，并且我将证明对每种具体的情形，这些假设条件是正确的.”

图 5.4　巴拿赫

图 5.5　苏格兰咖啡馆

在博士学位论文第一章的第一节“公理和基本定义”中，他用 $X,Y,Z,\cdots$ 表示集合 E 中的元素，用 $a,b,c,\cdots$ 表示实数. 他先在集合 E 上定义了加法 $X+Y$ 和数乘 $a\cdot X$ 两种运算. 他的空间公理分为三组，第一组为：

（1） $X+Y$ 是 E 中的元素；

（2） $X+Y=Y+X$；

（3） $X+(Y+Z)=(X+Y)+Z$；

（4） $X+Y=X+Z$ 可以推出 $Y=Z$；

（5） 存在 E 中的一个元素 θ 使得 $X+\theta=X$；

（6） $a\cdot X$ 是 E 中的元素；

（7） $a\cdot X=\theta$ 等价于 $X=\theta$ 或 $a=0$；

（8） $a\cdot X=a\cdot Y$ 且 $a\neq 0$ 可以推出 $X=Y$；

（9） $a\cdot X=a\cdot Y$ 且 $X\neq\theta$ 可以推出 $a=b$；

（10） $a\cdot(X+Y)=a\cdot X+a\cdot Y$；

（11） $(a+b)\cdot X=a\cdot X+b\cdot X$；

（12） $1\cdot X=X$；

（13） $a\cdot(b\cdot X)=(a\cdot b)X$.

第二组公理刻画了 E 中元素 X 的范数，范数是定义在 E 上的实值函数，用 $\|X\|$ 表示. 对于任意实数 a 和 E 中的元素 X，范数满足下面的公理(见图 5.6)：

（1） $\|X\|\geqslant 0$；

（2） $\|X\|=0$ 当且仅当 $X=0$；

（3） $\|a\cdot X\|=|a|\cdot\|X\|$；

（4） $\|X+Y\|\leqslant\|X\|+\|Y\|$.

II. *Il existe une operation appelée norme* (nous la désignerons par le symbole $\|X\|$), *définie dans le champ E, ayant pour contre-domaine l'ensemble de nombres réels et satisfaisant aux conditions suivantes*:

II_1. $\|X\|\geqslant 0$,
II_2. $\|X\|=0$ *équivaut à* $X=\theta$,
II_3. $\|a\cdot X\|=|a|\cdot\|X\|$,
II_4. $\|X+Y\|\leqslant\|X\|+\|Y\|$,
III. *Si* 1° $\{X_n\}$ *est une suite d'éléments de E*, 2° $\lim\limits_{\substack{r\to\infty\\p\to\infty}}\|X_r-X_p\|=0$,

il existe un élément X tel que

$$\lim_{n\to\infty}\|X-X_n\|=0.$$

图 5.6　巴拿赫的范数公理[①]

① 摘自巴拿赫博士学位论文的第 135 页.

第三组公理只包含一个完备性公理，如果$\{X_n\}$对范数来说是一个柯西列，即$\lim\limits_{m,n\to\infty}\|X_n - X_m\| = 0$，则存在$E$中一个元素$X$，使得$\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n - X\| = 0$.

巴拿赫运用上面的三组公理定义了完备的赋范空间或巴拿赫空间，这样定义的巴拿赫空间将具体的L^p空间、l^p空间以及连续函数空间都包含在内.

在巴拿赫博士学位论文第一章的第二节“范数和极限的辅助性定理”中，他证明了范数的如下几个性质.

定理 1：$\|X - Y\| \leqslant \|X\| + \|Y\|$.

定理 2：$\|X - Y\| \geqslant \|X\| - \|Y\|$.

定理 3：$\left\|\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n X_n\right\| \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n| \|X\|$.

定理 4：如果元素列$\{X_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$和$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = Y$，则$X = Y$.

定理 5：如果$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$，则$\lim\limits_{n\to\infty}\|X_n\| = \|X\|$.

定理 6：如果$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$，$\lim\limits_{n\to\infty} Y_n = Y$，$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = a$以及$\lim\limits_{n\to\infty} b_n = b$，则

$$\lim_{n\to\infty}(a_n X_n + b_n Y_n) = aX + bY.$$

定理 7：如果元素列$\{X_n\}$满足$X_n = X$，则$\lim\limits_{n\to\infty} X_n = X$.

定理 8：如果元素列$\{X_n\}$使得$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\|X_n\|$存在，则级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} X_n$是收敛的.

定理 9：元素列$\{X_n\}$收敛的充分必要条件是$\lim\limits_{\substack{p\to\infty \\ q\to\infty}}\|X_p - X_q\| = 0$.

在其论文第一章的第三节“集合上的相关定义和定理”中，巴拿赫对空间赋予了几何结构. 他在这一节先定义中心为X_1、半径为r的球，是满足$\|X - X_1\| \leqslant r$的所有X构成的集合，记为$K(X_1, r)$. $K(X_1, r)$的内部，是满足$\|X - X_1\| < r$的所有X构成的集合. 他在这里定义的球的概念，其实就是邻域. 紧接着他建立了这样一个定理：$K(X_2, r_2) \subseteq K(X_1, r_1)$的充分必要条件是$\|X_1 - X_2\| \leqslant r_1 - r_2$. 而且它还建立了“区间套定理”，即如果$K_n(X_n, r_n)$是球

的递减序列，则这些球的球心构成的元素列$\{X_n\}$存在极限X，X属于每个球.

有了球的定义后，巴拿赫用球的术语引入了聚点的概念. 设A是巴拿赫空间E的子集. 如果对每个$r>0$，球$K(X,r)$中至少包含A中不同于X的一个点，则称点X为子集A的聚点. 定义A的导集是A的聚点构成的集合. 如果A包含它的导集，则称A是闭的. 如果A等于它的导集，则称A是完全的. 如果包含在A中的每个球至少有B中的一个点，则A的子集B在A中是稠密的. 他指出可数无穷多个闭集的交是闭集.

5.4.2　巴拿赫空间上的算子

在其论文第一章的第四节，巴拿赫开始研究定义在巴拿赫空间E上的算子，它的值域是另一个巴拿赫空间E_1. 首先他给出了连续算子的定义. 一个算子$F(X)$称为在X_0处相对于集合A是连续的，如果

(1) $F(X)$对A中的所有X都有定义；

(2) X_0是集合A的聚点；

(3) 如果序列$\{X_n\}$满足$\lim\limits_{n\to\infty}X_n=X_0$，则$\lim\limits_{n\to\infty}F(X_n)=F(X_0)$.

他对连续算子建立了这样一个定理：如果$F_1(X)$和$F_2(X)$在X_0处相对于集合A是连续的，则

$$F(X)=a_1F_1(X)+a_2F_2(X)$$

也是连续的，其中a_1和a_2是任意实数. 巴拿赫在这里指出连续算子的线性组合也是连续算子. 紧接着，他给出了$F(X)$连续的充分必要条件. $F(X)$在X_0处相对于集合A是连续的，等价于$F(X)$和X_0满足上面定义中的条件(1)和(2)，且对每个$\varepsilon>0$，存在一个$r>0$，使得对$K(X_0,r)\cap A$中的所有z_1和z_2，有$\|F(z_1)-F(z_2)\|<\varepsilon$.

随后，巴拿赫还给出了算子一致连续的定义. 如果

(1) $F(X)$对A中的所有X都有定义；

(2) 对每个$\varepsilon>0$，存在$m>0$，使得对A中的任意元素X和X'，当$\|X-X'\|<m$时，有

$$\|F(X)-F(X')\|<\varepsilon$$

则称算子$F(X)$相对于集合A是一致连续的.

在第四节的后半部分，巴拿赫将研究的注意力转向了算子序列. 如果算子序列$\{F_n(X)\}$对集合A中的每个X，有$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(X)=F(X)$成立，其中$F(X)$是定义在$A$上的算子，则称$\{F_n(X)\}$收敛于$F(X)$.

在其论文第二章的第一节，巴拿赫定义了一种特殊的算子. 如果对所有的X和Y，有

$$F(X+Y)=F(X)+F(Y)$$

则称算子$F(X)$是加法算子. 可以证明$F(\theta)=\theta$，因为

$$F(\theta)=F(\theta+\theta)=2F(\theta)$$

也可以证明

$$F\left(\frac{p}{q}X\right)=\frac{p}{q}F(X)$$

其中p和q是任意实数，且$q\neq 0$. 巴拿赫的加法算子比我们现在的线性算子更一般.

巴拿赫指出如果加法算子$F(X)$对球$K(X_0,r)$中的所有X是有界的，则$F(X)$在E中的每个点X处是连续的. 如果加法算子是连续的，则它就是我们现在的线性算子. 由这个定理，他推导出这样几个结论. 如果加法算子$F(X)$在一点处连续，则它在E中的每个点处都连续. 如果加法算子$F(X)$是连续的，则存在一个常数$M>0$，使得对E中的每个X，有

$$\|F(X)\|\leqslant M\|X\|$$

即他指出连续的加法算子是有界算子. 在其论文的第 143 页，巴拿赫还对算子序列建立了这样一个定理：

如果$\{F_n(X)\}$满足

（1）$\{F_n(X)\}$是连续的加法算子序列；

（2）$\lim\limits_{n\to\infty}F_n(X)=F(X)$；

(3) $F(X)$是加法算子，则$F(X)$是连续的，且存在一个常数$M>0$，使得对E中的每个X，有

$$\|F_n(X)\| \leqslant M\|X\|$$

取$f_0=0$，令

$$f_{n+1}(x)=\phi(x)-\int_a^b K(x,y)f_n(y)\,\mathrm{d}y$$

冯·诺依曼利用逐次代入法，求解了第二型弗雷德霍姆积分方程

$$f+Kf=\phi$$

其中$Kf(x)=\int_a^b K(x,y)f(y)\,\mathrm{d}y$. 1890 年，皮卡运用迭代方法对一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=F(x,y),\qquad y(a)=y_0$$

证明了解的存在和唯一性定理，他取

$$y_0(x)=y_0$$

且

$$y_{n+1}(x)=y_0+\int_a^x F(t,y_n(t))\mathrm{d}t$$

在其博士学位论文中，巴拿赫以皮卡的迭代为模板建立了他的不动点定理：

设$U(X)$是连续算子，它的值域和定义域都是巴拿赫空间E，如果存在常数$0<M<1$，对E中所有X'和X''，有

$$\|U(X')-U(X'')\| \leqslant M\|X'-X''\|$$

则存在E中唯一的元素X，使得$X=U(X)$. 这里的$U(X)$不要求是加法算子.

这个定理的出现可能是压缩映射原理或不动点定理最早的抽象形式. 在微分方程、积分方程以及其他类型的方程理论中，解的存在性、唯一性以及近似解的收敛性都是重要课题. 运用不动点定理可以讨论微分方程、积分方程与其

他类型方程的解的存在性. 这正是巴拿赫建立这个定理的目的. 之后，巴拿赫的不动点定理又被扩展和提炼，甚至扩展到拓扑学领域.

设Y是E中的任意元素，且$X_1 = Y$. 当$n > 1$时，用归纳法定义，$X_n = U(X_{n-1})$. 因为

$$\|X_{n+1} - X_n\| = \|U(X_n) - U(X_{n-1})\| \leqslant M\|X_n - X_{n-1}\|$$

所以，有

$$\|X_{n+1} - X_n\| \leqslant M^n \|X_2 - X_1\|$$

又因为$M > 1$，从而由前面的结果可知级数$\sum_{n=1}^{\infty}(X_{n+1} - X_n)$收敛. 定义

$$X = X_1 + \sum_{n=1}^{\infty}(X_{n+1} - X_n)$$

这等价于

$$X = \lim_{n\to\infty} X_n$$

因此，由算子$U(X)$的连续性可知

$$U(X) = \lim_{n\to\infty} U(X_n)$$

又因为$X_n = U(X_{n-1})$，因而有

$$U(X) = \lim_{n\to\infty} X_n$$

由极限的唯一性可知，$X = U(X)$，这样巴拿赫证明了定理中的存在性，但是他在论文中没有证明定理中的唯一性.

接下来，他证明了下面关于积分方程抽象形式的解的定理. 考虑方程

$$X + \alpha F(X) = Y$$

其中Y是已知的，X是E中的未知元素，而且$F(X)$是连续加法算子，M是满足$\|F(X)\| \leqslant M'\|X\|$的$M'$的最大下界，$\alpha$是实数，则对每个$Y$，且对满足$|hM| < 1$的每个$h$，方程存在解

$$X = Y + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n h^n F^n(Y)$$

其中 $F^n(Y) = F(F^{n-1}(Y))$. 这个结果是谱半径定理的一种形式，并且是沃尔泰拉求解积分方程的方法的推广.

巴拿赫一直称他的空间为“B 型空间”. 1928 年，弗雷歇首次引入了“巴拿赫空间”，数学家们很快接受了这个术语. 1932 年，巴拿赫的《线性算子理论》一书出版，统一了当时泛函分析的众多成果，成为泛函分析的第一本经典著作.

线性空间是线性代数中的主要研究对象，涉及的运算是代数运算，因而在线性空间中没有收敛的概念，也就没有了开集、闭集、稠密性和可分性等分析学中的重要概念. 范数是欧氏空间中向量长度的推广，引入范数可以将收敛等分析学中的重要概念引入到线性空间中，使它成为赋范线性空间，完备的赋范空间称为巴拿赫空间. 因此，巴拿赫空间具有线性空间的代数结构，同时又具有用范数定义的拓扑结构. 之后，巴拿赫空间又成为更一般空间研究的出发点.

第 6 章　抽象希尔伯特空间理论的开始

量子力学蓬勃发展之际，人们认识到希尔伯特的谱理论可以应用到量子力学中，这激发了数学家对希尔伯特空间和算子的抽象理论的研究. 冯·诺依曼抽象出 L^2 空间与 l^2 空间这两个典型希尔伯特空间的共同特征，用公理化给出了抽象希尔伯特空间的定义，建立了希尔伯特空间上的算子理论.

6.1　抽象希尔伯特空间的定义

1925 年海森堡(Werner Karl Heisenberg，1901—1976)的矩阵力学和 1926 年薛定谔(Erwin Schrödinger，1887—1961)的波动力学，形成了量子力学的两大理论. 那么，这两大理论是否可以融合为一个统一的理论呢？如果可以的话，如何确立这个统一的理论便成了当时量子力学发展的当务之急.

1926 年，量子力学蓬勃发展之际，年轻的冯·诺依曼(见图 6.1)来到哥廷根成为希尔伯特的助手. 冯·诺依曼对这两大理论进行数学表述，海森堡所用的是无穷维希尔伯特序列空间，即 l^2 空间中的无穷矩阵，而薛定谔使用薛定谔方程，即将 L^2 空间中微分算子作用到波函数上. 由里斯-费舍尔定理可知，这两个理论是等价的. 人们终于认识到原来希尔伯特的谱理论是非常合适量子力学的数学工具.

对此，希尔伯特感慨地说道：

“无穷多个变量的理论研究，完全是出于纯粹数学的兴趣，我甚至管这一理论叫‘谱分析’，当时并没有预料到它后来会在实际的物理光谱理论中获得应用.”

对于希尔伯特在量子力学方面的贡献，海森堡这样来评述：

“从间接方面说，希尔伯特对哥廷根量子力学发展的影响最为巨大，凡是 20 世纪 20 年代在哥廷根学习过的人，对于这种影响都深有体会. 希尔伯特和他

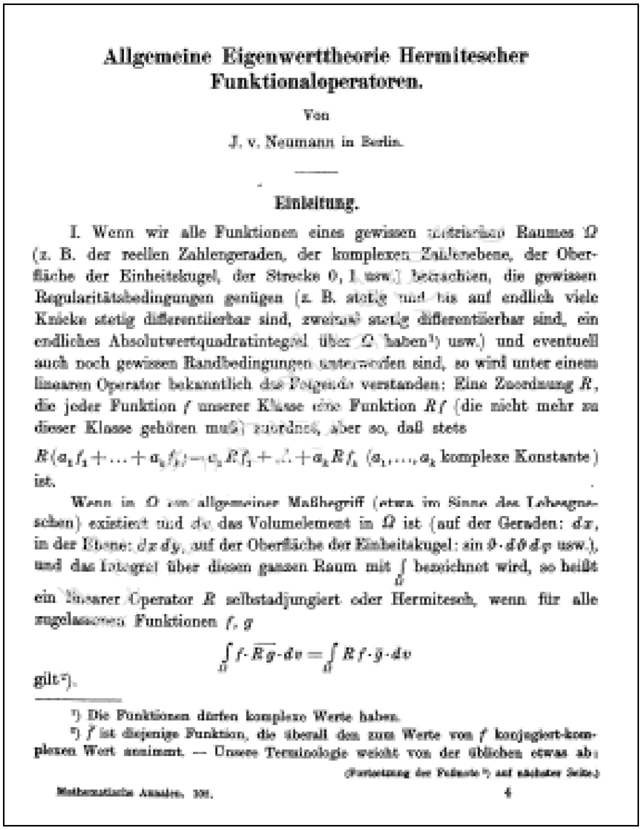
的同事们创造了一种特有的数学环境，所有年轻的数学家都是按希尔伯特积分方程和线性代数理论所体现的思想方式训练出来的. 因此，对于这些领域中的每一项理论发展来说，哥廷根始终是比其他任何地方更合适的场所. 现在已经证明，量子力学的数学方法原来是希尔伯特积分方程理论的直接应用，这的确是一件特别幸运的事情……”

图 6.1　冯・诺依曼

不过，希尔伯特的谱理论不久在某些方面就暴露出不能适应量子力学研究的需要. 因为其中的算子只是有界(对称)算子. 而量子力学中的算子一般不是有界算子. 这时，施密特鼓励冯・诺依曼，以更为抽象的形式来表述希尔伯特的理论，从而使推广了的希尔伯特理论能够满足量子力学发展的需要.

1929 年，冯・诺依曼连续发表了 3 篇用德文写成的论文. 他在第一篇论文“埃尔米特算子的一般理论”(见图 6.2)中将希尔伯特的谱理论推广到无界埃尔米特算子. 这篇论文共有 12 章和 3 个附录. 在长达 15 页的引言中，冯・诺依曼假设 $\{\varphi_n\}$ 是 L^2 空间中的完备规范正交系. 如果 f 是 L^2 中的元素，则 f 关于 $\{\varphi_n\}$ 的傅里叶系数构成的复序列 $\{a_n\}$，满足 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2<\infty$. 因此，序列 $\{a_n\}$ 是 l^2 空间中的元素. 反过来，如果 $\{a_n\}$ 是 l^2 空间中的元素，即满足 $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|^2<\infty$，则存在 L^2 空间中的唯一元素 f，它关于 $\{\varphi_n\}$ 的傅里叶系数为 $\{a_n\}$. 也就是说，冯・诺依曼指出，

里斯-费舍尔定理表明 L^2 空间与 l^2 空间之间存在一一对应关系. 另外，如果我们用公式 $(f,g)=\int_E f(z)\overline{g(z)}\,\mathrm{d}z$ 定义 L^2 空间中的内积 (f,g)，用公式 $(a,b)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\overline{b_n}$ 定义 l^2 空间中的内积 (a,b)，则当 f 对应于 a，g 对应于 b 时，有 $(f,g)=(a,b)$.



Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.

Von

J. v. Neumann in Berlin.

Einleitung.

I. Wenn wir alle Funktionen eines gewissen metrischen Raumes Ω (z. B. der reellen Zahlengeraden, der komplexen Zahlenebene, der Oberfläche der Einheitskugel, der Strecke 0, 1 usw.) betrachten, die gewissen Regularitätsbedingungen genügen (z. B. stetig und bis auf endlich viele Knicke stetig differentiierbar sind, zweimal stetig differentiierbar sind, ein endliches Absolutwertquadratintegral über Ω haben¹) usw.) und eventuell auch noch gewissen Randbedingungen unterworfen sind, so wird unter einem linearen Operator bekanntlich das Folgende verstanden: Eine Zuordnung R, die jeder Funktion f unserer Klasse eine Funktion Rf (die nicht mehr zu dieser Klasse gehören muß) zuordnet, aber so, daß stets

$R(a_1 f_1+\ldots+a_k f_k)=a_1 Rf_1+\ldots+a_k Rf_k$ ($a_1,\ldots,a_k$ komplexe Konstante) ist.

Wenn in Ω ein allgemeiner Maßbegriff (etwa im Sinne des Lebesgueschen) existiert und dv das Volumelement in Ω ist (auf der Geraden: dx, in der Ebene: $dx\,dy$, auf der Oberfläche der Einheitskugel: $\sin\vartheta\cdot d\vartheta\,d\varphi$ usw.), und das Integral über diesen ganzen Raum mit $\int\limits_\Omega$ bezeichnet wird, so heißt ein linearer Operator R selbstadjungiert oder Hermitesch, wenn für alle zugelassenen Funktionen f, g

$$\int\limits_\Omega f\cdot\overline{Rg}\cdot dv=\int\limits_\Omega Rf\cdot\bar{g}\cdot dv$$

gilt²).

¹) Die Funktionen dürfen komplexe Werte haben.

²) $\bar{f}$ ist diejenige Funktion, die überall den zum Werte von f konjugiert-komplexen Wert annimmt. — Unsere Terminologie weicht von der üblichen etwas ab;

(Fortsetzung der Fußnote ²) auf nächster Seite.)

Mathematische Annalen. 102.　　4

图 6.2　论文“埃尔米特算子的一般理论”的首页

在该论文的第一章“抽象希尔伯特空间”中，冯 • 诺依曼抽象出 L^2 空间和 l^2 空间的共同特征，用A到E共5条公理（见图6.3）给出了抽象希尔伯特空间 H 的定义，即

A）H 是一个线性向量空间. 在 H 上定义加法和数乘运算，使得如果 f_1 和 f_2 是 H 的元素，a_1 和 a_2 是任意复数，则 $a_1f_1+a_2f_2$ 也是 H 中的元素. H 中的元素被称为向量.

B）H 上存在一个内积 (f,g)，即任意两个向量 f 和 g 的复值函数，用它可以定义度量，且具有性质：

（1）$(af,g)=a(f,g)$；

（2）$(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$；

（3）$(f,g)=\overline{(g,f)}$；

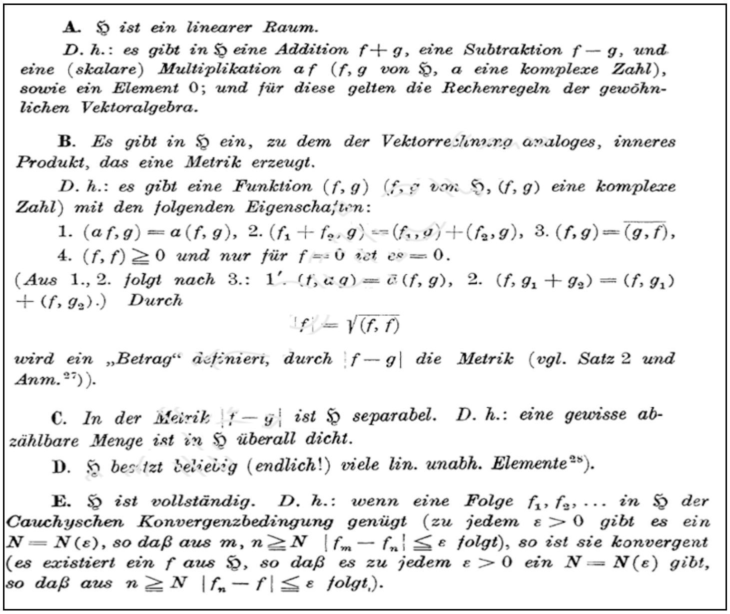
（4）$(f,f)\geqslant 0$，$(f,f)=0$ 当且仅当 $f=0$.

根据(3)能推出（1′）$(f,ag)=\overline{a}(f,g)$；（2′）$(f,g_1+g_2)=(f,g_1)+(f,g_2)$. 取 $\|f\|=\sqrt{(f,f)}$，则 $\|f-g\|$ 可以定义空间的一个度量.

C）H 在度量 $\|f-g\|$ 下是可分的，即在 H 中存在一个可数的稠密子集.

D）对每一个正整数 n，H 中存在 n 个线性无关的元素.

E）H 是完备的. 也就是说，如果序列 $\{f_n\}$ 是柯西列，即对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $m,n\geqslant N$ 时，有 $\|f_n-f_m\|\leqslant\varepsilon$，则在 H 中存在 f，对 $\forall\varepsilon>0$，存在正整数 N，当 $n\geqslant N$ 时，有 $\|f_n-f\|\leqslant\varepsilon$.



A. $\mathfrak{H}$ *ist ein linearer Raum.*

D. h.: es gibt in $\mathfrak{H}$ *eine Addition* $f+g$, *eine Subtraktion* $f-g$, *und eine (skalare) Multiplikation* af (f, g *von* $\mathfrak{H}$, a *eine komplexe Zahl*), *sowie ein Element* 0; *und für diese gelten die Rechenregeln der gewöhnlichen Vektoralgebra.*

B. *Es gibt in* $\mathfrak{H}$ *ein, zu dem der Vektorrechnung analoges, inneres Produkt, das eine Metrik erzeugt.*

D. h.: es gibt eine Funktion (f,g) (f, g *von* $\mathfrak{H}$, (f,g) *eine komplexe Zahl*) *mit den folgenden Eigenschaften:*

1. $(af,g)=a(f,g)$, 2. $(f_1+f_2,g)=(f_1,g)+(f_2,g)$, 3. $(f,g)=\overline{(g,f)}$,

4. $(f,f)\geqq 0$ *und nur für* $f=0$ *ist es* $=0$.

(*Aus* 1., 2. *folgt nach* 3.: 1′. $(f,ag)=\bar{a}(f,g)$, 2. $(f,g_1+g_2)=(f,g_1)+(f,g_2)$.) *Durch*

$$|f|=\sqrt{(f,f)}$$

wird ein „Betrag“ definiert, durch $|f-g|$ *die Metrik* (*vgl. Satz* 2 *und Anm.*[27])).

C. *In der Metrik* $|f-g|$ *ist* $\mathfrak{H}$ *separabel. D. h.: eine gewisse abzählbare Menge ist in* $\mathfrak{H}$ *überall dicht.*

D. $\mathfrak{H}$ *besitzt beliebig (endlich!) viele lin. unabh. Elemente*[28]).

E. $\mathfrak{H}$ *ist vollständig. D. h.: wenn eine Folge* $f_1, f_2, \ldots$ *in* $\mathfrak{H}$ *der Cauchyschen Konvergenzbedingung genügt (zu jedem* $\varepsilon>0$ *gibt es ein* $N=N(\varepsilon)$, *so daß aus* $m,n\geqq N$ $|f_m-f_n|\leqq\varepsilon$ *folgt), so ist sie konvergent (es existiert ein* f *aus* $\mathfrak{H}$, *so daß es zu jedem* $\varepsilon>0$ *ein* $N=N(\varepsilon)$ *gibt, so daß aus* $n\geqq N$ $|f_n-f|\leqq\varepsilon$ *folgt*).

图 6.3　冯 • 诺依曼给出的 5 条内积公理[①]

① 摘自冯 • 诺依曼 1929 年的论文“埃尔米特算子的一般理论”的第 64 页.

冯・诺依曼在公理 B 和公理 C 之间给出了元素正交和规范正交集的定义. 他指出如果 H 中的两个元素 f 和 g，使得 $(f,g)=0$，则称 f 与 g 是正交的. 正交是希尔伯特空间中一个重要概念，有了它才能建立正交投影和正交分解等希尔伯特空间中的重要定理. 如果一个线性子空间中的每个元素与另一个空间中的每个元素正交，则称这两个线性子空间是正交的. 如果集合 M 中的元素 f 和 g，满足

$$(f,g)=\begin{cases}1, & f=g\\ 0, & f\neq g\end{cases}$$

则称集合 M 为规范正交集. 同时他也给出了完备规范正交集的定义.

冯・诺依曼从他给出的这 5 条公理中推出了 8 个定理. 与我们在泛函分析教科书中看到的一样，它们都是用现代抽象语言表述的.

定理 1：不等式 $\|(f,g)\|\leqslant\|f\|\|g\|$ 成立，它被称为施瓦兹不等式.

定理 2：$\|af\|=|a|\|f\|$ 和 $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$ 成立.

定理 3：规范正交集是可数集，完备规范正交集是可数集.

定理 4：设 $\{\varphi_n\}$ 是规范正交系，则对希尔伯特空间 H 中的所有 f 和 g，级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\overline{(g,\varphi_n)}$$

是绝对收敛的，特别地，当 $f=g$ 时，有 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|(f,\varphi_n)|^2\leqslant\|f\|^2$.

定理 5：设 $\{\varphi_n\}$ 是规范正交系，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n$ 收敛当且仅当 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|a_n|^2$ 收敛.

定理 6：设 $\{\varphi_n\}$ 是规范正交系，对每个元素 f，级数

$$f'=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi_n$$

收敛，其中 $a_n=(f,\varphi_n)$，即 $f-f'$ 与所有 $\{\varphi_n\}$ 是正交的.

定理 7：规范正交系 $\{\varphi_n\}$ 完备的 3 个充分必要条件为

(1) $\{\varphi_n\}$ 生成了 H 的一个闭子空间.

(2) 对 H 中的所有元素 f，有

$$f=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\varphi_n,\qquad n=1,2,\cdots$$

(3) 对 H 中的所有元素 f，有

$$(f,g)=\sum_{n=1}^{\infty}(f,\varphi_n)\overline{(g,\varphi_n)}$$

定理 8：H 中的任意元素序列 $f_1,f_2,f_3,\cdots$ 可以做成规范正交系 $\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3,\cdots$.

冯 • 诺依曼在定理 8 的证明中用到了施密特标准正交化过程. 规范正交系是希尔伯特空间中的一个基本要素，他在这里得到的定理 3 到定理 8 已经给出了希尔伯特空间中的规范正交系的一些基本性质.

冯 • 诺依曼公理化希尔伯特空间的工作受到维纳、外尔及巴拿赫的影响. 1920 年，维纳在他的文章“基于连续变换的点集理论”中给出了一个一般的公理系，他将这个公理系称为“向量系”. 1922 年，巴拿赫在他的博士论文中给出了一个公理系(见本书 5.4 节). 至于外尔对他的影响，冯 • 诺依曼在这篇文章第 65 页的脚注中指出：

“外尔在他 1923 年出版的著作《空间，时间，物质》中提出了公理 A 和 B，它们与有限维向量空间的公理系有关.”

1929 年，当冯 • 诺依曼给出抽象希尔伯特空间的定义时，一些数学家和物理学家并不太理解. 他们还是习惯具体的数学和物理概念，而冯 • 诺依曼的希尔伯特空间太抽象了. 就连希尔伯特本人也曾问他年轻的学生：“到底什么是希尔伯特空间？”

希尔伯特空间和赋范空间之间有着怎样的关系呢？

希尔伯特空间是巴拿赫空间的特例. 巴拿赫空间没有内积，结构更为复杂，例如，巴拿赫空间不一定有基. 一个巴拿赫空间是希尔伯特空间的充分必要条件是

$$\|x+y\|^2+\|x-y\|^2=2\left(\|x\|^2+\|y\|^2\right)$$

成立. 只要巴拿赫空间满足这个等式，则以

$$(x,y)=\frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2+\|x-y\|^2\right)$$

为内积，它会成为一个希尔伯特空间.

希尔伯特空间 H 的对偶空间 H^*，即由所有线性泛函构成的线性空间也非常简单. 由里斯表示定理可知，希尔伯特空间 H 上的任意线性泛函 f 可唯一表示为

$$f(x)=(x,x^*)$$

其中 $x^*\in H$，且 $\|f\|=\|x^*\|$. 因此希尔伯特具有自对偶性. 巴拿赫空间的对偶空间比较复杂，如 L^p 空间的对偶空间是 L^q 空间.

6.2 抽象希尔伯特空间的算子

在论文“埃尔米特算子的一般理论”的引言中，冯·诺依曼指出：

“这项工作的主题是为了建立所有埃尔米特算子的一般特征值理论. 在这篇文章中我们将继续抽象，即这样的安排一开始使得我们的结果适用于所有函数空间（L^2 空间）和序列空间（l^2 空间）.”

在其论文第二章“希尔伯特空间上的算子”中，冯·诺依曼给出了希尔伯特空间上算子的一些定义和相关的重要定理. 如果希尔伯特空间 H 中的元素 $f_1,f_2,\cdots,f_n$ 满足

$$R(a_1f_1+a_2f_2+\cdots+a_nf_n)=a_1Rf_1+a_2Rf_2+\cdots+a_nRf_n$$

其中 $a_1,a_2,\cdots,a_n$ 是复数，则称 R 为希尔伯特空间 H 上的线性算子. 这是希尔伯特空间上抽象算子的最早定义. 如果当元素列 $\{f_n\}$ 收敛于 f，$\{Rf_n\}$ 收敛于 f^* 时，有 $Rf=f^*$ 成立，则称线性算子 R 是闭算子. 如果线性算子 R 满足

$$(f,Rg)=(Rf,g)$$

则称 R 是埃尔米特算子. 如果 $|Rf|=|f|$，则称 R 是长度不变的算子.

由于量子力学中的大多数算子不能定义在整个希尔伯特空间上，所以有必要研究线性算子的延拓问题. 冯・诺依曼指出，如果算子 R 的定义域是算子 S 的定义域的子集，且在相同的定义域中 $R=S$，则称算子 S 是算子 R 的延拓. 如果 R 的定义域是 S 的定义域的真子集，则 S 是 R 的真延拓. 紧接着他证明了关于延拓的两个重要定理.

定理 1：用线性可以将任意埃尔米特算子 R 先延拓为 $\widehat{R}$，再通过闭包将它延拓为 $\widetilde{R}$.

定理 2：如果 U 是长度不变的算子，则 U 在它的定义域和值域中都有闭子空间，U 是一一映射的，且 $(f,g)=(Uf,Ug)$.

冯・诺依曼指出，如果一个埃尔米特算子没有真延拓，则称它为极大算子. 设 R 为埃尔米特算子，如果存在 f^*，对所有 g，都有 $(f,Rg)=(f^*,g)$，则根据 $\operatorname{Im}(f^*,f)>0,\ <0,\ =0$ 这三种情况，称 f 分别属于 $+$ 类、$-$ 类和 0 类. 他指出如果 f 属于 0 类，则 R 可以延拓为 f 且 $Rf=f^*$. 反过来也是成立的. 同时他还定义了超极大算子. 如果算子 R 的所有延拓都属于 0 类，则称 R 是超极大算子.

连续和有界是刻画线性算子的两个重要概念. 冯・诺依曼证明了如果 R 为线性算子，则 R 连续等价于下面两个条件：

（1）$|Rf|\leqslant C|f|$；

（2）$|(f,Rg)|\leqslant C|f||g|$.

如果 R 为埃尔米特算子，则它连续等价于

$$|(f,Rf)|\leqslant C|f|^2$$

对于一个埃尔米特算子 R，如果存在 C，使得

$$(f,Rf)\leqslant C|f|^2$$

则称 R 是上半有界的.如果存在 C，使得

$$(f,Rf)\geqslant -C|f|^2$$

则称 R 是下半有界的.

在其论文第三章“线性子空间和投影算子”中，冯·诺依曼研究了投影算子和线性子空间. 首先，他给出这样一个定义：如果M和N是H的闭子空间，$M-N$定义为M中所有与N中的任意元素正交的元素做成的集合，则$M-N$是M的闭子空间，特别地，$H-N$是H的子空间，称它为N的正交补. 紧接着在论文的第 74 页，他证明了下面的投影定理(见图 6.4)：

设M是H的一个闭子空间，则H中的任意元素f可以分解为

$$f=g+h$$

其中g属于M，h属于$H-M$，并且这一分解是唯一的.

Satz 13. *Sei $\mathfrak{M}$ eine abg. lin. M. Jedes f kann auf eine und nur eine Art in $f=g+h$, g von $\mathfrak{M}$, h von $\mathfrak{H}-\mathfrak{M}$ zerlegt werden.*

Bemerkung. g heißt dann die Projektion von f in $\mathfrak{M}$, die Zuordnung von g zu f ist offenbar ein überall sinnvoller Operator, wir nennen ihn den Projektionsoperator von $\mathfrak{M}$, $P_{\mathfrak{M}}$ ($\mathfrak{M}$ ist eine abg. lin. M.!).

Beweis. Die Eindeutigkeit ist klar: Aus $g_1+h_1=g_2+h_2$ (g_1, g_2 von $\mathfrak{M}$, h_1, h_2 von $\mathfrak{H}-\mathfrak{M}$) folgt $g_1-g_2=h_2-h_1$, dieses gehört also zu $\mathfrak{M}$ wie zu $\mathfrak{H}-\mathfrak{M}$, ist somit zu sich selbst orth., also $=0$; d. h. $g_1=g_2$, $h_1=h_2$. Es bleibt übrig, die Existenz zu beweisen.

Da $\mathfrak{H}$ separabel ist, gibt es eine in $\mathfrak{M}$ überall dichte Folge $f_1, f_2, \ldots$ [33]), diese spannt also die abg. lin. M. $\mathfrak{M}$ auf. Nach Satz 8 gibt es also ein norm. orth. System $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, welches dasselbe tut. Nach Satz 6 konvergiert $g=\sum_{n=1}^{\infty}(f, \varphi_n)\cdot\varphi_n$, und es gehört mit den $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ zu $\mathfrak{M}$, und $h=f-g$ ist zu allen $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ orth. Also auch zu ihrer abg. lin. M., $\mathfrak{M}$ — d. h. h gehört zu $\mathfrak{H}-\mathfrak{M}$. Damit ist alles bewiesen.

图 6.4 冯·诺依曼的投影定理①

1908 年，施密特在具体的希尔伯特空间，即l^2空间中建立了这个投影定理(见本书 4.1 节). 冯·诺依曼在此将它推广到了一般的抽象希尔伯特空间上. 这个定理表明希尔伯特空间中的任意元素f都可以在任意闭子空间中找到它的“影子”. 冯·诺依曼用与施密特一样的方法证明了他的投影定理.

冯·诺依曼定义投影算子P_M为$P_M(f)=g$. 也就是说，投影算子是定义在整个希尔伯特空间H上的算子，它将元素f投影到f在M中的分量上. 随后他证明了有关投影算子的几个定理.

① 摘自冯·诺依曼 1929 年的论文“埃尔米特算子的一般理论”的第 74 页.

定理 1：P_M 是极大的埃尔米特算子，且满足 $P_M^2 = P_M$.

定理 2：如果 E 是任意极大埃尔米特算子，且满足 $E^2 = E$，则存在 H 的闭子空间 M 使得 $E = P_M$.

定理 3：满足 $E^2 = E$ 的极大埃尔米特算子 E 可以被定义为投影算子. 恒等算子 1 和零算子 0 是投影算子. 当 E 是投影算子时，$1-E$ 也是投影算子.

定理 4：投影算子 E 满足 $(f, Ef) = |Ef|^2$ 和 $|Ef| \leqslant |f|$，其中 f 是希尔伯特空间 H 中的元素.

定理 4 表明投影算子是有界的.

随后他证明了子空间的并集、交集与投影算子的和、乘积之间的关系.

定理 5：如果 M 和 N 是希尔伯特空间 H 的闭子空间，P_M 和 P_N 是投影算子，则 $P_M P_N$ 是投影算子当且仅当 $P_M P_N = P_N P_M$，$P_M P_N$ 是 $M \cap N$ 上的投影算子. $P_M + P_N$ 是投影算子当且仅当 $P_M P_N = 0$（或 $P_N P_M = 0$），$P_M + P_N$ 是 $M \oplus N$ 上的投影算子. $P_M - P_N$ 是投影算子当且仅当 $P_M P_N = P_N$（或 $P_N P_M = P_M$），$P_M - P_N$ 是 $M - N$ 上的投影算子.

此外，冯・诺依曼还研究了投影算子列，他建立了如下定理：

定理 6：设 $\{E_n\}$ 是投影算子构成的扩展或压缩序列，则存在投影算子 E，使得对所有 $f \in H$，有 $E_n f \to Ef$.

但是他只证明了前一种情形. 当 $\{E_n\}$ 是投影算子构成的扩展序列时，$|E_n f|^2$ 是有界递增序列. 从而对 H 中每个固定的 f，$\{E_n f\}$ 是一个柯西列. 因此，由完备性可知，$\lim\limits_{n\to\infty} E_n f$ 存在，且等于 Ef.

投影算子在算子的谱理论中具有重要作用，冯・诺依曼证明的这 6 个定理是投影算子的基本性质.

因为自伴算子都有谱分解，那么给定的埃尔米特算子是否有自伴延拓就成为一个非常重要的问题. 在论文“埃尔米特算子的一般理论”的第五章“柯西变换”中，冯・诺依曼通过考虑映射 $R \pm iI$，讨论了埃尔米特算子 R 的延拓问题. 他将 1855 年柯西参数化正交群时的想法引入到希尔伯特空间中，用来考虑埃尔米特算子的对称延拓.

在其论文的第九章“超极大算子和特征值表示”中，冯·诺依曼对前面定义的超极大算子建立了特征值表示. 首先，他定义单位分解为一簇开区间 $a<\lambda<b$ 上的投影算子 $E(\lambda)$，它们使得：

(1) 若 $\lambda \leqslant u$，则 $|E(\lambda)| \leqslant |E(\mu)|$，即 $E(\lambda)$ 的像是 $E(\mu)$ 的像的子集.

(2) 对所有 $f \in H$，有 $\lim\limits_{\lambda \to \lambda_0^+} E(\lambda) f = E(\lambda_0) f$.

(3) 对所有 $f \in H$，有 $\lim\limits_{\lambda \to a^+} E(\lambda) f = 0$ 和 $\lim\limits_{\lambda \to b^-} E(\lambda) f = f$.

这里的开区间可能是 $(-\infty,+\infty)$ 或 $(0,1)$.

他在这一章还建立了一个重要的定理：

令 $F(\lambda)$ 是 $(-\infty,+\infty)$ 上的单位分解.如果斯蒂尔切斯积分

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \mathrm{d}|F(\lambda) f|^2$$

是有限的，则存在唯一的 f^* 使得对所有 g，有

$$(f^*, g) = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^2 \mathrm{d}(F(\lambda) f, g)$$

成立.

如果对这些 f，定义算子 R 为 $Rf = f^*$，则称 R 是埃尔米特超极大算子. 对极大但不是超极大的算子，冯·诺依曼没有建立这样的分解.

冯·诺依曼第二篇论文的题目为“算子代数和正规算子的理论”，其中含有 5 章和 3 个附录，共 58 页. 在这篇文章中，他研究了定义在希尔伯特空间 H 上的有界线性算子，也研究了这些线性算子构成的代数结果，从而开创了算子代数这门新的数学分支. 他在冯·诺依曼代数中提出的一些问题直到 20 世纪 70 年代才得以完全解决.

冯·诺依曼在论文“算子代数和正规算子的理论”的第一章对希尔伯特空间 H 中引入了两种拓扑，即强拓扑和弱拓扑. 并对定义在 H 上的有界线性算子构成的集合B 引入了 3 种拓扑. 下面给出这 5 种拓扑的定义.

(1) H 中的强拓扑. f_0 的强邻域是使得 $|f - f_0| < \varepsilon$ 的所有 f 构成的集合，记为 $U_1(f_0;\varepsilon)$.

(2) H 中的弱拓扑. f_0 的弱邻域是所有满足 $|(f-f_0,\varphi_k)|<\varepsilon$（$k=1,2,\cdots,s$）的 f 构成的集合，记为 $U_2(f_0;\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s,\varepsilon)$，其中 s 是任意正整数，φ_k 是 H 中的任意固定元.因为可以证明 $U_1(f_0;\varepsilon)\subseteq U_2(f_0;\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s,\varepsilon)$，所以 H 中的强收敛可以推出 H 中的弱收敛.

(3) B 中的强拓扑. A_0 的强邻域是使得 $|(A-A_0)\varphi_k|<\varepsilon$ 的所有 A 构成的集合，记为 $U_3(A_0;\varphi_1,\varphi_2,\cdots,\varphi_s,\varepsilon)$，其中 s 是任意正整数，φ_k 是 H 中的任意固定元.

(4) B 中的弱拓扑. A_0 的弱邻域是所有满足 $|((A-A_0)\varphi_k,\psi_k)|<\varepsilon$ 的 A 构成的集合，记为 $U_4(f_0;\varphi_1,\psi_1,\varphi_2,\psi_2,\cdots,\varphi_s,\psi_s,\varepsilon)$，其中 s 是任意正整数，φ_k 和 ψ_k 是 H 中的任意固定元.

(5) B 中的一致拓扑. A_0 的一致邻域是对某个 $\varepsilon'<\varepsilon$，满足 $|((A-A_0)f)|<\varepsilon'$ 的所有 A 构成的集合，记为 $U_5(A_0;\varepsilon)$.

冯·诺依曼在给出这 5 种定义后，紧接着指出定义在 H 上的有界线性算子构成的集合 B，在一致拓扑的意义下是一个度量空间. 他也指出 B 是 $*-$代数，即 B 对加法、乘法、数量积以及 $*-$运算是封闭的. 在论文的脚注中，冯·诺依曼给出了 $*-$运算的性质.他还指出定义在 H 上的有界线性算子构成的集合 B 中的元素 A 和 B，满足下面 3 个性质：

$$|aA|=|a||A|$$

$$|A+B|\leqslant|A|+|B|$$

$$|AB|\leqslant|A||B|$$

环论是抽象代数学中最深刻的一部分，大致可以分为交换环、结合环及非结合环. 1921 年，诺特(Amalie Emmy Noether，1882—1935)用公理化给出了抽象环的定义. 冯·诺依曼在其论文“算子代数和正规算子的理论”的第二章接连给出了与环有关的 3 个定义. 如果 A 和 B 是定义在 H 上的有界线性算子构成的集合 B 的子集 M 中的元素，aA、A^*、$A+B$ 以及 AB 也是 M 中的元素且 M 在弱拓扑的意义下是闭的，则称 M 做成了一个环. 如果 M 是集合 B 的任意子集，则称 $R(M)$ 是集合 B 中包含 M 的最小的环. 如果 M 是集合 B 的任意子集，则使得集合 B 中的每个元素与 A 和 A^* 可交换的所有 $A\in$ B 构成的集合记为 M'，重复这个步骤可以得到 $M''=(M')'$，等等.

有了这些定义后，冯·诺依曼指出 $M' = M''' = M^{V} = \cdots$，且 $M'' = M^{IV} = M^{VI} = \cdots$. 显然有 $M \subseteq M''$. 他也指出 M' 和 M'' 也能做成一个环. 在论文中，他得到一个重要结果，即令 M 是一个环，A 是有界埃尔米特算子，$E(\lambda)$ 是他在第一篇文章(即论文“埃尔米特算子的一般理论”)中对 A 定义的单位分解，则 $A \in M$ 当且仅当对所有 $\lambda < 0$，有 $E(\lambda) \in M$，且对所有 $\lambda \geqslant 0$，有 $I - E(\lambda) \in M$. 如果有 $I \in M$，则 $A \in M$ 当且仅当对所有 $\lambda < 0$，有 $E(\lambda) \in M$.

在其论文“算子代数和正规算子的理论”的第三章“阿贝尔环”中，他定义如果集合 B 中的元素 A 与 A^* 是可交换的，则称 A 是正规的. $R(M)$ 是阿贝尔型的当且仅当 M 中的每个元素是正规的.

希尔伯特的一些追随者一直将无穷矩阵作为研究算子的重要工具. 在 1929 年的第三篇论文“无穷矩阵理论”中，冯·诺依曼指出虽然无穷矩阵在处理一些特殊算子的表示上有优势，但是它不是处理定义在希尔伯特空间上的算子的最合适的工具. 他在文章中指出：

“对有限维的欧氏空间以及希尔伯特空间上的有界算子，算子与矩阵之间的关系比较简单，甚至是一一对应的. 对希尔伯特空间上的无界算子，算子与矩阵之间的关系表现出新的性质特征. 这在本质上更复杂，就像前面提到的那样，矩阵理论和算子理论并不是等价的，也不是对应的……”

冯·诺依曼的这一工作使得分析学家确信，无穷矩阵并不是研究希尔伯特空间上算子的最好的工具.

人 名 列 表

N. Abel　阿贝尔(1802—1829)
C. Arzelá　阿尔泽拉(1847—1912)
G. Ascolt　阿斯科利(1843—1896)
S. Banach　巴拿赫(1892—1945)
A. Beer　贝尔(1825—1863)
D. Bernoullt　丹尼尔·伯努利(1700—1782)
B. Bolzano　波尔查诺(1781—1848)
A. Cauchy　柯西(1789—1857)
A. Cayley　凯莱(1821—1895)
R. Courant　柯朗(1888—1972)
G. Cramer　克莱姆(1704—1752)
J. Dieudonné　迪厄多内(1906—1992)
G. Dirichlet　狄利克雷(1805—1859)
R. Descartes　笛卡儿(1596—1650)
L. Euler　欧拉(1707—1783)
P. Fermat　费马(1601—1665)
E. Fischer　费舍尔(1875—1956)
J. Fourier　傅里叶(1768—1830)
M. Fréchet　弗雷歇(1878—1973)
I. Fredholm　弗雷德霍姆(1866—1927)
G. Frobenius　弗罗贝尼乌斯(1849—1917)
C. F. Gauss　高斯(1777—1855)
J. Gram　格拉姆(1850—1916)

J. Hadamard　阿达玛(1865—1963)
H. Hahn　哈恩(1879—1934)
F. Hausdorff　豪斯多夫(1868—1942)
W. Heisenberg　海森堡(1901—1976)
E. Helly　黑利(1884—1943)
D. Hilbert　希尔伯特(1862—1943)
G. Hill　希尔(1838—1914)
G. Kowalewski　柯瓦列夫斯基(1876—1950)
E. Holmgren　霍姆格林(1872—1943)
F. Klein　克莱因(1894—1925)
J. L. Lagrange　拉格朗日(1736—1813)
P. Laplace　拉普拉斯(1749—1827)
H. Lebesgue　勒贝格(1875—1941)
G. Leibniz　莱布尼茨(1646—1716)
J. Liouville　刘维尔(1809—1882)
G. Mittag-Leffler　米塔格-列夫勒(1888—1980)
C. Neumann　诺依曼(1832—1925)
I. Newton　牛顿(1642—1727)
A. Noether　诺特(1882—1935)
E. Picard　皮卡(1856—1941)
H. Poincaré　庞加莱(1854—1912)
L. Rayleigh　瑞利勋爵(1842—1919)
B. Riemann　黎曼(1826—1866)
F. Riesz　里斯(1880—1956)
M. Riesz　里斯(1886—1969)
L. Roux　拉·鲁(1809—1882)
E. Schmidt　施密特(1876—1959)
H. A. Schwarz　施瓦兹(1843—1921)
E. Schrödinger　薛定谔(1887—1961)

T. Stieltjes　斯蒂尔切斯(1856—1894)
C. Sturm　施图姆(1803—1855)
J. Sylvester　西尔维斯特(1814—1897)
C. Thomae　托梅(1840—1921)
V. Volterra　沃尔泰拉(1860—1940)
H. Von Koch　科克(1870—1924)
J. von Neumann　冯・诺伊曼(1903—1957)
W. Weber　韦伯(1804—1891)
K. Weierstrass　魏尔斯特拉斯(1815—1897)
N. Wiener　维纳(1894—1964)
H. Weyl　外尔(1885—1955)
W. Wirtinger　维尔丁格(1865—1945)

术 语 列 表

A

埃尔米特算子

B

巴拿赫空间
伴随算子
贝塞尔不等式
毕达哥拉斯定理(勾股定理)
变分法
薄膜振动方程
边界条件
不动点定理
闭子空间

C

测度
常微分方程
重积分
抽象代数
抽象群
超极大算子

D

代数(学)
代数基本定理
代数结构
导数
狄利克雷函数
点集拓扑学
点谱
叠核
第一型沃尔泰拉积分方程
第二型沃尔泰拉积分方程
第一型弗雷德霍姆积分方程
第二型弗雷德霍姆积分方程
对偶空间
对称核积分方程
定积分的反演
狄利克雷问题
点态极限

E

二次型

F

泛函分析
分析(学)
分析算术化
弗雷德霍姆积分方程

弗雷德霍姆积分方程的行列式
弗雷德霍姆择一性
傅里叶积分
傅里叶系数
傅里叶展式
范数
赋范空间
范德蒙行列式

G

格林函数
公理化方法
广义主轴定理
规范正交化过程

H

函数
函数方程
核
行列式
赫尔德不等式

J

积分
积分号
积分方程
积分变换
积分算子
级数
级数解
极限
极限函数
解析几何
集合
几何(学)
矩阵
紧算子
矩量问题

K

可测集
可测函数

L

勒贝格积分
连分数
连续
连续函数
量子力学
连续谱
黎曼积分
零测度集
里斯-费舍尔定理

M

幂级数
闵科夫斯基不等式

N

内积

有界线性算子
有界双线性形式
一致收敛
一致连续
应用数学
预解核

Z

自伴算子
自伴椭圆型微分算子
正规算子
正交
正交矩阵
逐次逼近

参 考 文 献

A. 外文参考文献

原始文献

[1] Baire, R. Sur les fonctions des variable réelles[D]. Imprimerie Bernardoni de C. Rebeschini & Co.,1899.

[2] Banach, S. Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales[J]. Publié dans Fund Math, 1922, 3:133-181.

[3] Banach, S. Théorie des opérations linéaires[M]. Warszawa: Monografie Matematyczne, 1932.

[4] Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales[J]. Publié dans Fund Math, 1922, 3:133-181.

[5] Cauchy, A, L. Sur l'équation à l'aide de laquelle on determine les inégalités séculaires des mouvements des planets[M]. Paris: Exercices de Mathématiques, 1829.

[6] Cauchy, A, L. Mémoire sur l'équation qui a pour racines les moments d'inertie principaux d'un corps solide et sur diverses équation du mème genre[J]. Mém. Acad. Sci. Inst. France, 1830, 9:111-113.

[7] Du Bois-Reymond, P. Bemerkungen über $\triangle z=\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$ [J]. J. de Crelle, 1888, 103: 204-229.

[8] Fisher, E. Sur la convergence en moyenne[J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1907, 144:1022-1024.

[9] Fréchet, M. Généralisation d'un théorème de Weierstrass[J]. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 1904, 139: 848-850.

[10] Fréchet, M. Sur les fonctions limites et les opérations fonctionnelles[J]. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 1905, 140: 27-29.

[11] Fréchet, M. Sur les fonctions d'une infinite de variables[J]. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 1905, 140: 567-568.

[12] Fréchet, M. La notion d'écart dans le Calcul fonctionnel[J]. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 1905, 140: 772-774.

[13] Fréchet, M. Sur l'écart de deux courbes et sur courbes limites[J]. Trans. Amer. Math. Soc., 1905, 6: 435-449.

[14] Fréchet, M. Les ensembles de courbes continues[J]. Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences, Paris, 1905, 141: 873-875.

[15] Fréchet, M. Sur quelques points du Calcul fonctionnel[J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 1906, 22: 1-74.

[16] Fréchet, M. Les ensembles abstraits et le Calcul fonctionnel[J]. Rendiconti Circ. Mat. Palermo, 1910, 30: 1-26.

[17] Fréchet, M. Sur les ensembles abstraits [J]. Annales scientifiques de l'Ecole Normale Supérieure, 1921, 38(3): 341-388.

[18] Fréchet, M. Les espaces abstraits[M]. Paris: Gauthier-Villars,1928.

[19] Fréchet, M. Les mathématiques et le concret[M]. Paris: Presses Universitaires de France, 1955.

[20] Fredholm, I. Sur une classe d' equations fonctionnelles[J]. Acta mathematics, 1903, 27(1): 365-390.

[21] Fredholm, I. Oeuvres complètes de Ivar Fredholm[M]. Malmö: Litos Reprotryck, 1955.

[22] Fourier, J. Théorie Analytique de la Chaleur, Second edition[M]. Paris: Fiemin Didot, 1882.

[23] Fourier, J. Alexander Freeman trans. The Analytical Theory of Heat[M]. New York: Dover, 1955.

[24] Hahn, H. Über Folgen linearer Operationen[J]. Monatshefte für Mathematik und physic, 1922, 32:3-88.

[25] Hahn, H. Über linearer Gleichungssysteme in linearer Räumen[J]. Journal für die reine und angewandte Mathematik, 1927, 157:214-229.

[26] Helly, E. Über linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten[J]. Monatshefte, 1921, 31:60-91.

[27] Hilbert, D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen[J]. Zweite Mitteilung, Göttingen Nachrichten, 1904: 49-91.

[28] Hilbert, D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen[J]. Zweite Mitteilung, Göttingen Nachrichten, 1904: 213-259.

[29] Hilbert, D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen[J]. Zweite Mitteilung,

Göttingen Nachrichten, 1905: 307-338.

[30] Hilbert, D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen[J]. Zweite Mitteilung, Göttingen Nachrichten, 1906: 157-227.

[31] Hilbert, D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen[J]. Zweite Mitteilung, Göttingen Nachrichten, 1906: 439-480.

[32] Hilbert, D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen[J]. Zweite Mitteilung, Göttingen Nachrichten, 1910: 355-419.

[33] Hilbert, D. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen[M]. B.G. Teubner: Leipzig, 1912.

[34] Hill,G. W.On the part of the motion of the linear perigee which is a function of the motions of the sun and the moon[J].Acta mathematics,1886,8:1-36.

[35] Kellogg, O. D. Unstetigkeiten in den linearen Integralgleichungen[J]. Mathematische Annalen, 1904, 58(4):441-456.

[36] Kellogg, O. D. Unstetigkeiten bei den linearen Integralgleichungen mit Anwendung auf ein Problem von Rieman[J]. Mathematische Annalen, 1905, 60(3):424-433.

[37] Koch, H. v. Sur une application des déterminants infinis à la théorie des équations différentielles linéaires[J].Acta Mathematica,1891,15(1):53-63.

[38] Koch, H. v. Sur les déterminants infinis et les équations différentielles linéaires[J].Acta Mathematica,1892, 16(1):217-295.

[39] Lebesgue, H. Intégrale, longueur, aire[J]. Annali di matematica pura ed applicata, 1902, 3: 231-359.

[40] Lebesgue, H. Leçons sur l'intégration et la recherché des fonction primitives[M]. Gauthier-Villars, 1904.

[41] Liouville, J. Sur quelques questions de géométrie et de mécanique, et sur un nouveau genre de calcul pour résoudre ces questions[J]. Journal de l'école Polytechnique, 1832, 13(21):1-69.

[42] Liouville, J. Second mémoire sur le développement des fonctions[J]. Journal de Mathématiques pures et Appliquées, 1837, 2:16-35.

[43] Lagrange, J. L. Recherches sur la method de maximis et minimis[J]. Miscellanea Taurinensia, 1759, 1:18-42.

[44] Neumann, J. v. Allgemeine Eigenwerttheorie Hermitescher Funktionaloperation[J]. Mathematische

Annalen,1929, 102:49-131.

[45] Neumann, J. v. Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren[J]. Mathematische Annalen, 1929, 102:370-427.

[46] Neumann, J. v. Zur Theorie der unbeschränkten Matrizen[J]. Journal für die reine und angewandte, 1929, 161:208-236.

[47] Neumann, J. v. On complete topological spaces[J]. Transactions of the American Mathematical Society, 1935, 37(1):1-20.

[48] Poincaré, H. Sur les detérminants d'ordre infini[J]. Bulletin de la Société mathématique der France, 1886, 14:77-90.

[49] Poincaré, H. Sur les equations linéaires aux différentielles ordinaires et aux différences finies[J]. American Journal of Mathematics,1885, 7(3):203-258.

[50] Poincaré, H. Sur les equations aux dérivées partielles de la physique mathématique[J]. American Journal of Mathematics,1890, 12(3):211-294.

[51] Poincaré, H. Sur les équations de la physique mathématique[J]. Rendiconti del circolo di Palermo,1894, 8:57-155.

[52] Poincaré, H. La méthode de Neumann et le problème de Dirichlet[J]. Acta mathematics, 1897, 20:59-142.

[53] Riesz, F. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions[J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1907, 144:615-619.

[54] Riesz, F. Über orthogonale Funktionensysteme[J]. Göttingen, 1907, 116-122.

[55] Riesz, F. Sur les systèmes orthogonaux de fonctions et l'équations de Fredholm[J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1907, 144:734-736.

[56] Riesz, F. Sur une espèce de Géométrie analytique des systèmes de fonctions sommables[J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1907, 144:1409-1411.

[57] Riesz, F. Die Genesis des Raumbegriffs[J]. Math. Naturwiss. Ber. Ungarn, 1906, 24: 309-353.

[58] Riesz, F. Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre[J]. Atti IV Congr. Intern. Mat., 1908, II: 18-24.

[59] Riesz, F. Sur les operations fonctionnelles linéaire[J]. Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 1909, 149:974-977.

[60] Riesz, F. Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues[M]. Paris:Gauthier-Villars, 1913.

[61] Riesz, F. Über lineare Funktionalgleichungen[J]. Acta Mathematica, 1918, 41(1):71-98.

[62] Riesz, F. Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen[J]. Mathematische Annalen, 1910, 69(4):449-497.

[63] Schmidt, E. Zur Theorie der linearen undnicht linearen Integralgleichungen[J]. Mathematische Annalen, 1907, 63:433-476.

[64] Schmidt, E. Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten[J]. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo,1908, 25(1):53-77.

[65] Toeplitz, O. Die Jacobische transformation der quadratischen formen von unendlichvielen veränderlichen[J]. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1907:101-109.

[66] Toeplitz, O. Zur theorie der quadratischen formen von unendlichvielen veränderlichen[J]. Göttinger Nachr., 1907:489-506.

[67] Toeplitz, O. Zur Transformation der Scharen bilinearer Formen yon unendlichen Vergnderlichen[J]. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, 1907: 110-115.

[68] Volterra, Vito. Opera matematiche, vol 5[M]. Accademia Nazionzale dei Lincei, 1954-1962.

[69] Volterra, Vito. Sur une généralisation de la théorie des fonctions d'une imaginaire[J]. Acta Math, 1889, 12: 233-286.

[70] Volterra, V.Sulle inversione degli integrali definiti, Nota I[J]. Atti R. Accad. Sci. Torino, 1896, 31(1):311-323.

[71] Volterra, V. Sulle inversione degli integrali definite, Nota II[J]. Atti R. Accad. Sci. Torino, 1896, 31:400-408.

[72] Volterra, V. Sulle inversione degli integrali definite[J]. Rend. R. Accad. Lincei, 1896, 5(5):177-185.

[73] Volterra, V. Sulle inversione degli integrali multipli[J]. Rend. R. Accad. Lincei, 1896, 5(5):289-300.

[74] Volterra, V. Sopra alcune questioni di inversione di integrali definitive[J]. Ann. Mat. Pura Appl., 1897, 25(2):139-178.

[75] Wiener, N. On the theory of sets of points in terms of continuous transformations[J]. Comptes rendus du Congrès international des Mathèmaticiens, 1921:312-315.

[76] Wiener, N. Limit in terms of continuous transformations[J]. Bulletin de la Société mathématique de France, 1922, 50:119-134.

[77] Wiener, N. The group of the linear continuum[J]. Proceedings of the London Mathematical Society, 1922, 20(2):329-346.

[78] Wiener, N. Note on a paper of M. Banach[J]. Fundamenta Mathematicae, 1923, 4:136-143.

研究文献

[79] Archibald, T, Tazzioli, R. Integral equations between theory and practice: the cases of Italy and France to 1920[J]. Archive for History of Exact Sciences, 2014, 68(5):547-597.

[80] Bernkopf, M. The Development of Function Spaces with Particular Reference to their Origins in Integral Equation Theory[J]. Archive for History of Exact Sciences, 1966, 3(1): 1-96.

[81] Bernkopf, M. A history of infinite matrices[J]. Archive for History of Exact Sciences, 1968, 4(4):308-358.

[82] Bernkopf, M. Division of Mathematics: three pivotal papers of John von Neumann[J]. Transactions of the New York Academy of Sciences, 1969, 31(5) :516-529.

[83] Birkhoff, G. The Establishment of Functional Analysis[J]. Historia Mathematica, 1984, 11: 258-321.

[84] Browder, F. E. The relation of functional analysis to concrete analysis I 20th century mathematics[J]. Historia Mathematica, 1975 , (2): 577-290.

[85] Brunner, H. 1896-1996: One hundred years of Volterra integral equations of the first kind[J]. Applied Numerical Mathematics, 1997, 24(1):83-93.

[86] Ciesielski, K. On Stefan Banach and some of his Results[J]. Banach Journal of Mathematical Analysis, 2007, 1(1):1-10.

[87] Ciesielski, K, Moslehian, M, S. Some remarks on the history of functional analysis[J]. Ann. Funct. Anal., 2010, 1:1-12.

[88] Ciesielski, K.Lost legends of lovo1: The Scottish Café[J]. Math. Intelligencer,1987, 9(4):36-37.

[89] Dieudonné, Jean. History of functional analysis[M]. Amsterdam, New York, Oxford: North-Holland publishing Company, 1981.

[90] Dorier J. L. A General Outline of the Genesis of Vector Space Theory[J]. Historia Mathematica, 1995, 22(3): 227-261.

[91] Goodstein, J. R. The Rise and Fall of Vito Volterra's World [J]. Journal of the History of ideas, 1984, 45(4):607-617.

[92] Gray, J. The history of the concept of a finite-dimensional vector space[J]. Historia Mathematica, 1980, 7(1):65-70.

[93] Gray, J. D. The shaping of the Riesz representation theorem: A chapter in the history of analysis[J]. Archive for History of Exact Sciences, 1984, 31(2):127-187.

[94] Hochstadt, H. Eduard Helly, father of the Hahn-Banach theorem[J]. The Mathematical Intelligencer, 1980, 2(3):123-125.

[95] Jahnke, H. N. A history of analysis [M]. American Mathematical Society, London Mathematical Society, 2003.

[96] Kjeldsen, T. H. The early history of the moment problem[J]. Historia Mathematica, 1993, 20:19-44.

[97] Lützen, J. Sturm and Liouville's Work on Ordinary Linear Differential Equations[J]. Archive for History of Exact Sciences, 1984, 29(4):309-376.

[98] Lützen, J. Joseph Liouville's contribution to the theory of integral equations[J]. Historia Mathematica, 1982, 9(4):373-391.

[99] Monna, A. F. Functional analysis in historical perspective[M]. Utrecht, The Netherlands, Oosthoek publishing Company, 1973.

[100] Moore, G. H. The Axiomatization of Linear Algebra: 1875-1940[J]. Historia Mathematica, 1995, 22(3):262-303.

[101] Pietsch, A. Erhard Schmidt and his contributions to functional analysis[J]. Mathematische Nachrichten, 2010, 283(1):6-20.

[102] Steen, L. A. Highlights in the History of Spectral Theory[J]. The American Mathematical Monthly, 1973, 80(4):359-381.

[103] Taylor, A. E. A Study of Maurice Fréchet: Ⅰ. His Early Work in Point Set Theory and the Theory of Functionals[J]. Archive for History of Exact Sciences, 1982, 27(3): 233-295.

[104] Taylor, A. E. A Study of Maurice Fréchet: Ⅱ. Mainly about his work on General Topology[J]. Archive for History of Exact Sciences, 1985, 34(4): 279-380.

[105] Taylor, A. E. A Study of Maurice Fréchet: Ⅲ. Fréchet as Analyst, 1909-1930[J]. Archive for History of Exact Sciences, 1987, 37(1): 25-76.

[106] Thomas Hawkins. Lebesgue's Theory of Integration[M]. Chelsea, 1975.

[107] Weyl, H. David Hilbert and his mathematical work[J]. Bulletin of the American Mathematical Society, 1944, 50:612-654.

[108] Weyl, H. David Hilbert: 1862-1943[J]. Obituary Notices of Fellows of The Royal Society, 1944, 4:547-553.

[109] Weyl, H. A half century of Mathematics[J]. The American Mathematical Monthly, 1951, 58:523-533.

[110] Whittaker, E. Biography of Vito Volterra[J]. Obituary Notices of Fellows of The Royal Society of London, 1941, 3:691-729.

[111] Zeilon, N. Ivar Fredholm[J]. Acta Mathematica, 1930, 54(1):1-16.

中文参考文献

[112] 阿蒂亚著, 袁向东译. 数学的统一性[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2009.

[113] 巴拿赫著, 金成桴译. 线性算子理论[M]. 北京: 科学出版社，2011.

[114] 布尔巴基著, 胡作玄译. 数学的建筑[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2009.

[115] 蔡天新. 数学传奇：那些难以企及的人物[M]. 北京: 商务印书馆, 2016.

[116] 蔡天新. 数学简史[M]. 北京: 中信出版社, 2017.

[117] 邓明立, 王涛. 历史与结构观点下的群论[M]. 北京: 科学出版社, 2016.

[118] 迪厄多内著, 曲安京, 李亚亚等译. 泛函分析史[M]. 北京: 高等教育出版社, 2016.

[119] 傅里叶著，桂质亮译. 热的解析理论[M]. 北京: 北京大学出版社, 2008.

[120] 郭敦仁, 孙小礼. 傅立叶, 一首数学的诗——纪念傅立叶诞生 220 周年[J]. 自然辩证法研究, 1988, 4(6): 18–25.

[121] 郭坤宇. 算子理论基础[M]. 上海: 复旦大学出版社, 2014.

[122] 哈代著, 李文林, 戴宗铎, 高嵘译. 一个数学家的辩白[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2009.

[123] 胡作玄, 邓明立. 20 世纪数学思想[M]. 济南: 山东教育出版社, 1999.

[124] 胡作玄. 近代数学史[M]. 济南: 山东教育出版社, 2006.

[125] 胡作玄. 冯・诺依曼:二十世纪的天才数学家[J]. 自然辩证法通讯, 1984, 6(2):67-80.

[126] 胡作玄. 赫尔曼. 外尔：数学家、物理学家、哲学家[J]. 自然辩证法通讯,1985, 7(3):60-71.

[127] 贾随军. 傅里叶级数理论的起源[D]. 西北大学博士论文, 2010.

[128] 贾小勇. 19 世纪以前的变分法[D]. 西北大学博士论文, 2008.

[129] 卡茨著, 李文林等译. 数学史通论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2004.

[130] 康斯坦斯. 瑞德著. 希尔伯特[M]. 袁向东, 李文林译. 上海: 上海科学技术出版社, 2006.

[131] 李迪. 中外数学史教程[M]. 北京: 高等教育出版社, 1993.

[132] 李文林. 数学史概论[M]. 北京: 高等教育出版社, 2000.

[133] 李文林. 数学的进化—东西方数学史比较研究[M]. 北京: 科学出版社, 2005.

[134] 李文林. 算法、演绎倾向和数学史分期[J]. 自然辩证法通讯, 1986, 2:46-50.

[135] 李文林. 数学珍宝—历史文献精选[M]. 北京: 科学出版社, 1998.

[136] 李星. 积分方程[M]. 北京: 科学出版社, 2008.

[137] 李亚亚, 王昌. 希尔伯特空间诞生探源[J]. 自然辩证法研究, 2013, 29(12):90–94.

[138] 李亚亚, 王昌. 紧算子理论成因探析[J]. 自然辩证法研究, 2014, 30(12): 80–84.

[139] 李亚亚, 王冰霄, 敖特根. 弗雷德霍姆对希尔伯特积分方程思想的影响[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2013, 43(6): 997–1000.

[140] 李亚亚, 王昌. 试论希尔伯特的积分方程与谱理论[J]. 自然辩证法通讯, 2015, 37(3):78–82.

[141] 李亚亚. 希尔伯特的积分方程理论[D]. 西北大学博士论文, 2015.

[142] 梁宗巨, 王青建, 孙宏安. 世界数学通史[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社,2001.

[143] 梁宗巨. 数学历史典故[M]. 沈阳: 辽宁教育出版社,1995.

[144] 刘培杰. 从庞加莱到佩雷尔曼[M]. 哈尔滨: 哈尔滨工业大学出版社, 2008.

[145] 路见可, 钟寿国. 积分方程论[M]. 武汉: 武汉大学出版社, 2008.

[146] M. 克莱因著, 万伟勋, 石生明, 孙树本等译. 古今数学思想(第三册)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2002.

[147] M.克莱因著, 邓东皋, 张恭庆等译. 古今数学思想(第四册)[M]. 上海: 上海科学技术出版社, 2002.

[148] 曲安京. 中国数学史研究的两次运动[J]. 科学, 2004, 56(2): 27-30.

[149] 曲安京. 中国数学史研究范式的转换[J]. 中国科技史杂志, 2005, 26(1): 50-58.

[150] R. 柯朗, D. 希尔伯特著, 钱敏, 郭敦仁译. 数学物理方法I[M]. 北京: 科学出版社, 2011.

[151] R. 柯朗, D. 希尔伯特著, 熊振翔, 杨应辰译. 数学物理方法II[M]. 北京: 科学出版社, 2012.

[152] W. 邓纳姆著, 李伯民, 汪军, 张怀勇译. 微积分的历程[M]. 北京: 人民邮电出版社, 2010.

[153] 王昌. 点集拓扑学的创立[D]. 西北大学博士论文, 2012.

[154] 王昌. 弗雷歇在抽象空间方面的最初工作[J]. 科学技术哲学研究, 2013, 30(1): 84–89.

[155] 王昌. 弗雷歇与希尔伯特的抽象空间理论比较研究[J]. 西北大学学报(自然科学版), 2013, 43(1):163–167.

[156] 王昌, 曲安京. 弗雷歇的博士论文及其影响[J]. 自然辩证法通讯, 2014, 36(3):37–40+126.

[157] 王昌, 李亚亚. 从希尔伯特空间到巴拿赫空间的建立[J]. 科学技术哲学研究, 2015, 32(5):90–93.

[158] 王声望, 邓维行. 实变函数与泛函分析概要[M]. 北京: 高等教育出版社, 1990.

[159] 吴文俊. 世界著名数学家传记(下)[M]. 北京: 科学出版社, 1995.

[160] 希尔伯特著, 李文林, 袁向东译. 数学问题[M]. 大连: 大连理工大学出版社, 2009.

[161] 徐传胜. 圣彼得堡数学学派研究[M]. 北京: 科学出版社, 2016.

[162] 许跟起. Banach 空间中线性算子理论[M]. 北京: 学苑出版社, 2011.

[163] 袁小明. 数学思想导论[M]. 南宁: 广西教育出版社, 1991.

[164] 张奠宙. 20 世纪数学经纬[M]. 上海: 华东师范大学出版社, 2002.

[165] 张恭庆, 林源渠. 泛函分析讲义(上册)[M]. 北京: 北京大学出版社, 2006.